

سؤالات آزمون سراسری ۹۸

سؤالات رشته‌ی MBA

۱- فرض کنید z ریشه‌ای از معادله $z^5 + z^3 + z + 1 = z^2 + z^2 + z^2 + 1 = z^5$ باشد، مقدار z کدام است؟

- (۱) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ (۲) $\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ (۳) $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ (۴) $\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$

۲- مکان هندسی تمام z هایی از صفحه مختلط که $\operatorname{Re}(z + \frac{1}{z}) = \operatorname{Im}(z - \frac{1}{z})$ کدام است؟

- (۱) یک دایره به مرکز مبدأ مختصات
(۲) یک دایره به استثنای یک نقطه روی آن
(۳) یک خط به استثنای نقطه‌ای روی آن خط
(۴) یک خط گذرنده از مبدأ مختصات

۳- بازه همگرایی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{1297}}{3^n} (x-3)^n$ کدام است؟

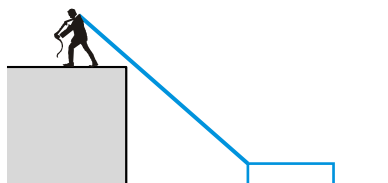
- (۱) $(1, 5)$ (۲) $[1, 5)$ (۳) $(\frac{1}{3}, 4]$ (۴) $[\frac{1}{3}, 4]$

۴- فرض کنید R_1 و R_2 به ترتیب، شعاع همگرایی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{3^n} (\Delta x - 3)^n$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{3^n} (\Delta x - 3)^n$ باشند، در این صورت کدام مورد صحیح است؟

- (۱) $R_1 + R_2 = 1$ (۲) $R_1 = R_2$ (۳) $R_1 > R_2$ (۴) $R_2 > R_1$

۵- شخصی بالای یک دیواره در ارتفاع ۲۰ متری سطح آب ایستاده است و طنابی را مانند شکل با سرعت $4 \frac{m}{s}$ می‌کشد و این طناب به قایقی درون آب متصل است.

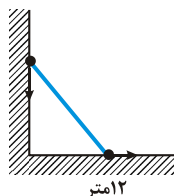
هنگامی که هنوز ۲۵ متر از طناب بین شخص و قایق باقی مانده است، سرعت نزدیک شدن قایق به پای دیوار چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) $\frac{20}{3}$ (۲) $\frac{20}{7}$
(۳) $\frac{16}{7}$ (۴) $\frac{16}{5}$

۶- نردبانی به طول ۱۵ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم به نحوی که طرف دیگر نردبان روی زمین قرار دارد. حال اگر سمتی از نردبان که روی زمین قرار دارد را با سرعت v از دیوار دور کنیم، طرف دیگر نردبان با سرعت v_1 به سمت زمین حرکت می‌کند، در این صورت زمانی که فاصله پای نردبان تا

دیوار ۱۲ متر است $|\frac{v}{v_1}|$ کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۷- فرض کنید $A = \int_0^1 e^{x^2} dx$ ، در این صورت مقدار $\int_0^1 (e^{x^2+1} - A) dx$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) e (۳) $(e-1)A$ (۴) eA

۸- منحنی $y = \sin x$ را بر $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi^2 - 1}{4}$ (۲) $\frac{\pi^2}{4}$ (۳) $\frac{\pi^2 - \pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi(\pi-1)}{4}$

۹- فرض کنید $x^y = y^x$ ، در این صورت $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

(۱) $\frac{y(x \ln x - y)}{x(y \ln y - x)}$ (۲) $\frac{y(y \ln y - y)}{x(x \ln x - x)}$ (۳) $\frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$ (۴) $\frac{y(y \ln y - x)}{x(x \ln x - y)}$

۱۰- کدام گزینه در مورد سری های $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\cos \frac{1}{n} - 1)$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\cos \frac{1}{n} + 1)$ به ترتیب، صحیح است؟

(۱) واگرا - همگرا (۲) همگرا - همگرا (۳) همگرا - واگرا (۴) واگرا - واگرا

۱۱- انتگرال های $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 e^{x^2}}$ و $J = \int_1^{+\infty} \frac{(1+x)dx}{x^2 + \ln x + 1}$ به ترتیب و هستند.

(۱) واگرا - همگرا (۲) همگرا - همگرا (۳) همگرا - واگرا (۴) واگرا - واگرا

۱۲- فرض کنیم $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ ، مقدار $f^{(13)}(-\frac{1}{2})$ کدام است؟ (منظور از $f^{(13)}(x_0)$ مشتق ۱۳ ام از $f(x)$ در نقطه x_0 است.)

(۱) $\frac{13!}{2}$ (۲) $-\frac{13!}{2}$ (۳) $13!$ (۴) $-13!$

۱۳- اگر y تابعی بر حسب x باشد که در رابطه $x^{2x} - 2x^x \cot y - 1 = 0$ صدق کند، $y'(1)$ کدام است؟

(۱) $\log 2$ (۲) $-\log 2$ (۳) -1 (۴) 1

۱۴- فرض کنید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-3)^n$ دارای بازه همگرایی $[0, 6]$ باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ موجود باشد. در این صورت بازه همگرایی سری

$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n a_n (x-1)^n$ کدام است؟

(۱) $[-1, 3]$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $[0, 2]$

۱۵- مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\lambda}(\pi+1)$ (۲) $\frac{1}{\lambda}(\pi+2)$ (۳) $\frac{1}{\lambda}(\pi+3)$ (۴) $\frac{1}{\lambda}\pi$

۱۶- فرض کنید $\sin z = x^2 - 2xy + xy^2$. معادله صفحه مماس بر این رویه در نقطه $(1, 0, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

(۱) $x - y = 1$ (۲) $x + y = 1$ (۳) $z - y = \frac{\pi}{4}$ (۴) $z + y = \frac{\pi}{4}$

۱۷- اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = A$ و $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = B$ ، کدام گزینه در مورد A و B صحیح است؟

(۱) A وجود ندارد و $B = 1$ (۲) $A = 0$ و B وجود ندارد (۳) $A = 1$ و $B = 0$ (۴) $A = 0$ و $B = 1$

۱۸- فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ، مقدار مشتق جهتی $D_{(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})} f(0, 0)$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{\lambda}$ (۳) 0 (۴) $\frac{\sqrt{3}}{\lambda}$

۱۹- اگر $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{x}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y^2 dy dx$ ، مقدار I کدام است؟

(۱) $\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{2}$ (۲) $\frac{\cos \lambda}{3}$ (۳) $\frac{1 - \cos \lambda}{3}$ (۴) $\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}$

۲۰- مقدار $\oint_C (\Delta y + \cos \sqrt{x}) dx + (\lambda x + e^{y^2}) dy$ ، که در آن C مرز دایره $x^2 + y^2 = 2$ با جهت مثبت می باشد، کدام است؟

(۱) 6π (۲) 10π (۳) $2(\sqrt{3})\pi$ (۴) $3(\sqrt{2})\pi$



۲۱- اگر $F(x, y, z) = 0$ و F_x و F_y و F_z همگی موجود و پیوسته و ناصفر باشند، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$ کدام است؟

- (۱) +۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ممکن است موجود نباشد.

۲۲- فرض کنید C مرز دایره $x^2 + (y+2)^2 = 10$ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است. اگر

$$\int_C (ke^x y + e^x x) dx + (e^x + ke^y y) dy = 0$$

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۳- فرض کنید $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ و C مرز مربع با رئوس $(0, 0, 0)$ ، $(2, 0, 0)$ ، $(0, 2, 0)$ و $(2, 2, 0)$ است که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است. انتگرال میدان برداری F بر منحنی C کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۴

۲۴- خم $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2 \cos 2t)$ را برای $t \in [-\pi, \pi]$ در نظر بگیرید. انحنای خم در نقطه $(2, 0, 2)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{17}$ (۲) $\frac{\sqrt{17}}{4}$ (۳) $2\sqrt{17}$ (۴) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۲۵- اگر S کره واحد باشد و $\iint_S (2xz + ky^2) d\sigma = 4\pi$ در این صورت مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۶- مقدار انتگرال تابع $f(x, y, z) = xyz$ بر منحنی $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۲۷- اگر $\vec{F} = (xy^2, x^2y, (x^2 + y^2)z)$ و S سطح استوانه توپر $1 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ و $0 \leq z \leq 1$ باشد و $\vec{N}$ قائم یک‌ه رو به خارج استوانه باشد مقدار

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma$$

- (۱) ۰ (۲) π (۳) 2π (۴) 4π

۲۸- فرض کنید C منحنی $r = 10 + \cos^2 \theta$ باشد که $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، مقدار $\int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ کدام است؟

- (۱) -2π (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) 2π

۲۹- مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_1^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \frac{dz dy dx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

- (۱) $\frac{\pi}{2} \ln 2$ (۲) $\frac{2\pi}{3} \ln 2$ (۳) $\frac{\pi}{2} (1 - \ln 2)$ (۴) $\frac{2\pi}{3} (1 - \ln 2)$

۳۰- فرض کنید منحنی C دارای پارامتری $R(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, \cos t + 4)$ باشد که $0 \leq t \leq 2\pi$ و $F(x, y, z) = (z^2 + e^z, 4x, e^{z^2} \cos^2 z)$ مقدار

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

- (۱) $\frac{29\pi}{2}$ (۲) 15π (۳) $\frac{31\pi}{2}$ (۴) 16π

۱- گزینه «۴» ابتدا معادله داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و با مجموع ۷ جمله اول یک تصاعد هندسی که جمله اول آن ۱ و قدر نسبت آن

$$-z \text{ می‌باشد روبرو هستیم که مجموع این جملات از رابطه‌ی } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ به دست می‌آید و داریم:}$$

$$1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6=0 \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1 \times (1-(-z)^7)}{1+z} = 0$$

$$1+z^7=0 \Rightarrow z^7=-1 \Rightarrow z=\sqrt[7]{-1} \Rightarrow r=1, \tan \theta=0 \Rightarrow \theta=\pi$$

$$\sqrt[7]{z} = \sqrt[7]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{7} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{7} \right) \quad k=0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

توجه داشته باشید که ریشه‌ی n ام عدد مختلط z از رابطه‌ی $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ به دست می‌آید.

۲- گزینه «۳» عدد مختلط z را به صورت دکارتی $x+iy$ در نظر می‌گیریم و باید قسمت‌های حقیقی $z + \frac{1}{z}$ و موهومی $z - \frac{1}{z}$ را مساوی هم قرار دهیم.

$$(x+iy) + \frac{1}{x+iy} = (x+iy) - \frac{1}{x+iy}$$

عبارت‌های کسری را در مزدوج مخراج آن‌ها ضرب و تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$(x+iy) + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = (x+iy) - \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow R_e\left(z + \frac{1}{z}\right) = x + \frac{x}{x^2+y^2}, \quad I_m\left(z - \frac{1}{z}\right) = y + \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\xrightarrow{\text{باید}} x + \frac{x}{x^2+y^2} = y + \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow (x-y)\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \xrightarrow{\text{باید}} x-y=0 \Rightarrow x=y$$

خط $y=x$ البته به غیر از مبدأ چرا که باید $z \neq 0$ باشد، به دلیل وجود $\frac{1}{z}$.

۳- گزینه «۱» برای به دست آوردن بازه همگرایی باید ابتدا شعاع همگرایی را از رابطه‌ی $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$ به دست آوریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^{1397}}{n^{1397}} \times \frac{n^{1397}}{n^{1397}} \right| = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \Rightarrow R=2$$

اکنون بازه همگرایی را از رابطه‌ی $|x-3| \leq 2$ به دست می‌آوریم و داریم:

$$-2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

دو سر بازه یعنی $x=1$ و $x=5$ باید جداگانه بررسی شوند.

بهازای $x=5$ سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} n^{1397}$ درمی‌آید که یک سری واگراست.

و بهازای $x=1$ هم سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^{1397}$ درمی‌آید که این سری هم یک سری واگراست (چون حد جمله عمومی مخالف صفر است)، پس دو

سر بازه‌ی همگرایی باید باز باشد یعنی $(1, 5)$.

روش تستی: طبق نکته گفته شده در کتاب ریاضی عمومی بدون دخالت دست مدرسان شریف، در این مثال $\alpha=1397, \beta=0$ می‌باشد و چون

$$\beta - \alpha = -1397 < 0 \text{ می‌باشد، پس دو سر بازه همگرایی باید باز باشد و این یعنی گزینه (۱) صحیح است.}$$

نکته: برای به دست آوردن بازه همگرایی سری‌های توانی به صورت سریع از عبارت‌هایی مانند e^n و $n^n, 2^n$ و ... صرف نظر می‌کنیم و سری را به فرم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} (x-c)^n \text{ تبدیل می‌کنیم و سه حالت زیر را داریم:}$$

(۱) اگر $\beta - \alpha > 1$ باشد، دو سر بازه همگرایی باید بسته باشد.

(۲) اگر $0 < \beta - \alpha \leq 1$ باشد، بازه همگرایی قطعاً باید به صورت نیم باز باشد، یعنی یک سرش بسته و سر دیگرش باز باشد.

(۳) اگر $\beta - \alpha \leq 0$ باشد، دو سر بازه همگرایی حتماً باز می‌باشد.

۴- گزینه «۲» شعاع همگرایی سری اول را از رابطه‌ی $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$ به دست می‌آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{r^n} (\Delta x - r)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \times \frac{r^n}{n!} \right| = \frac{1}{R_1} \Rightarrow \infty = \frac{1}{R_1} \Rightarrow R_1 = 0$$

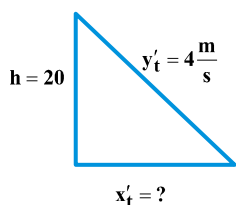
شعاع همگرایی سری دوم را از رابطه‌ی $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ به دست می‌آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{r^n} (\Delta x - r)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{r^n}} = \frac{1}{R_r} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r} = \frac{1}{R_r} \Rightarrow \infty = \frac{1}{R_r} \Rightarrow R_r = 0$$

پس $R_1 = R_r$ می‌باشد.

۵- گزینه «۱» برای حل مسائل کمیت‌های وابسته به زمان باید با توجه به داده‌های مسئله و همچنین شکل سؤال یک رابطه بین داده‌های مسئله برقرار کنیم (معمولاً طبق قضیه فیثاغورث یا تالس...) و سپس از دو طرف تساوی برقرار شده نسبت به زمان مشتق بگیریم که تغییرات x را با x'_t و تغییرات y را هم با y'_t نشان می‌دهیم.

در این مثال با توجه به شکل بین ناظر و دیوار و قایق روی آب که یک مثلث قائم‌الزاویه داریم، قضیه فیثاغورث را می‌نویسیم و داریم:

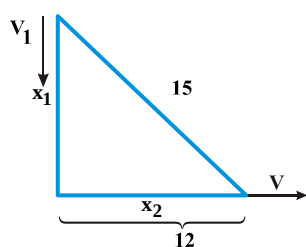


$$\begin{aligned} h^2 + x^2 &= (y)^2 \\ 400 + x^2 &= 625 \\ x^2 &= 225 \Rightarrow x = 15 \end{aligned}$$

اکنون از دو طرف رابطه زیر نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و داریم: از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$x^2 + h^2 = y^2 \Rightarrow 2xx'_t = 2yy'_t \Rightarrow 2(15)x'_t = 2(25)4 \Rightarrow x'_t = \frac{25 \times 4}{15} = \frac{20}{3} \left(\frac{m}{s} \right)$$

۶- گزینه «۴» برای حل مسائل مربوط به کمیت‌های وابسته به زمان ابتدا باید با توجه به داده‌های مسئله یک رابطه بین این داده‌ها برقرار کنیم و سپس با استفاده از این رابطه هم یک مقدار مجهول را به دست آوریم و هم با مشتق‌گیری از رابطه نسبت به زمان، خواسته سؤال را به دست آوریم. در این مثال با توجه به شکل داده شده باید یک رابطه‌ی فیثاغورث بین داده‌های مسئله برقرار کنیم تا مقدار مجهول x_1 را ابتدا بیابیم. یعنی:



$$\begin{aligned} x_1^2 + (12)^2 &= (15)^2 \\ x_1^2 + 144 &= 225 \Rightarrow x_1^2 = 81 \Rightarrow x_1 = 9 \end{aligned}$$

اکنون از دو طرف رابطه‌ی $x_1^2 + x_2^2 = 225$ نسبت به متغیر زمان مشتق می‌گیریم و داریم:

$$2x_1x'_1 + 2x_2x'_2 = 0$$

با توجه به اینکه تغییر مسافت برابر سرعت می‌باشد، قرار می‌دهیم $x'_1 = V$ و $x'_2 = V$ و داریم:

$$2(9)V_1 + 2V(12) = 0 \Rightarrow 18V_1 = -24V \Rightarrow \left| \frac{V}{V_1} \right| = \left| -\frac{18}{24} \right| = \frac{3}{4}$$

۷- گزینه «۳» مقدار A را که حاصل انتگرال می‌باشد و یک عدد ثابت است در انتگرال خواسته شده جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$\int_0^1 e^{x^2} \times e \, dx - \int_0^1 A \, dx = e \int_0^1 e^{x^2} \, dx - (Ax)_0^1 = eA - A = (e-1)A$$

۸- گزینه «۲» حجم حاصل از دوران تابع $f(x)$ حول محور x ها در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

۹- گزینه «۳» ابتدا از دو طرف رابطه‌ی داده شده $\ln$ می‌گیریم و سپس از مشتق تابع ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$x^y = y^x \Rightarrow y \ln x = x \ln y \Rightarrow y \ln x - x \ln y = 0$$

$$y'_x = -\left(\frac{y(\frac{1}{x}) - \ln y}{\ln x - x(\frac{1}{y})}\right) = -\left(\frac{\frac{y-x \ln y}{x}}{\frac{y \ln x - x}{y}}\right) = -\frac{y(y-x \ln y)}{x(y \ln x - x)} = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$$

۱۰- گزینه «۱» با استفاده از هم‌ارزی $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ ابتدا جمله‌ی عمومی سری‌ها را به صورت‌های زیر بازنویسی می‌کنیم و با استفاده از سری P همگرایی یا واگرایی سری‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \cos \frac{1}{n}) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{(\frac{1}{n})^2}{2}) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2n^2}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \xrightarrow{P=1} \text{واگرا}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \cos \frac{1}{n^2}) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{(\frac{1}{n^2})^2}{2}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^4} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3} \xrightarrow{P=3>1} \text{همگرا}$$

۱۱- گزینه «۴» انتگرال I در $x=0$ ناسرگی دارد، پس در مخرج کسر می‌توانیم از e^{x^2} صرف‌نظر کنیم، چون مقدار آن به‌ازای $x=0$ برابر ۱ می‌باشد و داریم:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 e^{x^2}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^2 (e^0)} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \text{واگرا}$$

انتگرال J در $x \rightarrow \infty$ ناسرگی دارد، پس می‌توانیم از جملات توان کمتر صرف‌نظر کنیم و در نهایت با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$J = \int_1^{\infty} \frac{(1+x)dx}{x^2 + \ln x + 1} \sim \int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \Rightarrow \text{واگرا}$$

۱۲- گزینه «۲» مشتق مرتبه n م توابع هموگرافیک به فرم کلی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \Rightarrow f^{(12)}(x) = \frac{(-2)^{12}(12!)(0-2)}{(2x+3)^{14}} \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} \frac{2^{12} \times (12!)(-2)}{2^{14}} = \frac{-(12!)}{2}$$

بنابراین داریم:

اگر فرمول مشتق مرتبه n م تابع هموگرافیک به فرم کلی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را ندانیم، باید چند مرتبه از آن مشتق بگیریم تا بتوانیم از روی آن مشتق مرتبه n م را حدس بزنیم.

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \Rightarrow f^{(1)}(x) = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2(2x+3) - (2)(2)}{(2x+3)^4} = \frac{8}{(2x+3)^3} = \frac{(-2)(2!)(-2)}{(2x+3)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-3(2x+3)^2 - (2)(8)}{(2x+3)^6} = \frac{-48}{(2x+3)^4} = \frac{(-2)^3(3!)(-2)}{(2x+3)^4}$$

ملاحظه می‌کنید که علامت مشتق‌های مرتبه فرد منفی می‌باشد، پس باید علامت مشتق مرتبه سیزدهم منفی باشد.

از روی مشتق‌های گرفته شده می‌بینیم که در مخرج هر کسر توان عبارت از مرتبه مشتق مربوطه یک درجه بالاتر است، یعنی در مشتق مرتبه اول، مخرج کسر توان ۲ دارد و در مشتق مرتبه دوم، مخرج کسر توان ۳ دارد و به همین صورت الی آخر، پس در مشتق مرتبه سیزدهم مخرج کسر توان ۱۴ دارد. در صورت کسرها متناسب با مرتبه مشتق، آن عدد فاکتوریل می‌گیرد، یعنی در مشتق مرتبه اول (۱!)، در مشتق مرتبه دوم (۲!) و در مشتق مرتبه سوم (۳!) را داریم؛ پس در مشتق مرتبه سیزدهم در صورت کسر (۱۳!) را حتماً داریم. در هر مرتبه از مشتق‌گیری، در صورت کسر قرینه‌ی عدد c که همان ضریب x در مخرج کسر تابع هموگرافیک می‌باشد به توان عددی یک واحد کمتر از مرتبه مشتق می‌رسد، یعنی در مشتق مرتبه اول (۲) و در مشتق مرتبه دوم (۲) و در مشتق مرتبه سوم (۲) را داریم، پس در مشتق مرتبه سیزدهم (۲) را در صورت کسر حتماً داریم.



در انتها می‌بینیم که در هر مرتبه از مشتق‌گیری در صورت کسر عدد (-2) را داریم (توجه داشته باشید که این عدد همان حاصل عملیات $ad - bc$ از روی تابع هموگرافیک است)، پس در مشتق مرتبه سیزدهم، نیز در صورت کسر (-2) باید قرار بگیرد.

$$f^{(13)}(x) = \frac{(-2)^{12} (13!) (-2)}{(2x+3)^{14}} \quad \text{پس مشتق مرتبه سیزدهم برابر می‌شود با:}$$

$$f^{(13)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-(2^{12})(13!)}{2^{14}} = -\frac{(13!)}{2} \quad \text{اکنون } x = -\frac{1}{2} \text{ را قرار می‌دهیم و داریم:}$$

۱۳- گزینه «۳» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

$$\text{اگر } x=1 \Rightarrow 1-2\cot y-1=0 \Rightarrow \cot y=0$$

$$A^2 - 2A\cot y - 1 = 0$$

$$2AA' - 2(A'\cot y - y'(1+\cot^2 y)A) = 0$$

$$\frac{A=1, A'=1}{\cot y=0} \rightarrow 2-2(0-y'(1+0))=0 \Rightarrow 2=-2y' \Rightarrow y'=-1$$

اکنون از دو طرف تساوی نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم و داریم:

A' همان مشتق x^x است که برابر $x^x(1+\ln x)$ می‌باشد و داریم:

روش دوم: با استفاده از مشتق توابع به فرم $y = u^V$ داریم:

$$y = u^V \Rightarrow y' = u^V (V' \ln u + \frac{u'}{u} V)$$

$$\text{اگر } x=1 \Rightarrow 1-2\cot y-1=0 \Rightarrow \cot y=0$$

$$x^{2x} - 2x^x \cot y - 1 = 0$$

از دو طرف نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم:

$$x^{2x} \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \right) - 2(x^x (\ln x + 1) \cot y - y'(1 + \cot^2 y) x^x) = 0 \xrightarrow[\cot y=0]{x=1} (0+2) - 2(0-y') = 0$$

$$2+2y'=0 \Rightarrow y'=-1$$

۱۴- گزینه «۴» در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ مرکز بازه همگرایی $x=3$ می‌باشد و با توجه به این که بازه همگرایی آن $[0, 6]$ است، پس شعاع همگرایی این

سری برابر ۳ می‌باشد، پس $R=3$ است و این یعنی $\frac{1}{R} = \frac{1}{3}$ می‌باشد.

اکنون شعاع همگرایی سری جدید که مرکز بازه همگرایی آن $x=1$ می‌باشد را به‌دست می‌آوریم و داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} a_{n+1}}{3^n a_n} \right| = \frac{1}{R}$$

با توجه به این که از سری قبل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$ را به‌دست آوردیم، در این سری جدید آن را قرار می‌دهیم و داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{R} \Rightarrow R=1$

سری جدید، مرکز آن $x=1$ و شعاع همگرایی آن $R=1$ می‌باشد و بازه همگرایی این سری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|x-1| \leq R \Rightarrow |x-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

توجه داشته باشید که در جمله‌ی عمومی سری جدید فقط عامل 3^n اضافه شده است که تأثیر آن بر روی شعاع همگرایی سری قبلی و در نتیجه بازه همگرایی سری قبلی می‌باشد و تغییری در باز یا بسته بودن بازه همگرایی ایجاد نمی‌کند. یعنی داریم:

$$\sum a_n (x-3)^n \xrightarrow[R=6]{[0,6]} 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow -3 \leq x-3 \leq 3$$

$$\sum 3^n a_n (x-1)^n \xrightarrow{\text{باید}} -3 \leq 3(x-1) \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

توجه داشته باشید که توضیحی که برای دلیل باز یا بسته بودن بازه همگرایی بیان کردیم خود روش تستی برای پاسخ به این سؤال می‌باشد.

۱۵- گزینه «۲» با توجه به اینکه در تابع زیر انتگرال عامل $u^2 + a^2$ را داریم از تغییر متغیر $u = a \tan \theta$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$x = \tan \theta \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 \theta) d\theta, \quad 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} (\pi + 2)$$

۱۶- گزینه «۱» معادله صفحه مماس در نقطه (x_0, y_0, z_0) برابر است با:

$$f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f_z(z-z_0) = 0$$

$$f : x^2 - 2xy + xy^2 - \sin z = 0$$

$$f_x = 2x - 2y + y^2 \xrightarrow{(1,0,\frac{\pi}{2})} 2, \quad f_y = -2x + 2xy \xrightarrow{(1,0,\frac{\pi}{2})} -2, \quad f_z = -\cos z \xrightarrow{(1,0,\frac{\pi}{2})} 0$$

$$2(x-1) - 2(y-0) = 0 \Rightarrow 2x - 2 - 2y = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 2 \Rightarrow x - y = 1$$

بنابراین معادله صفحه مماس برابر است با:

۱۷- گزینه «۴» در هر دو تابع کسری داده شده مبدأ مختصات تنها ریشه‌ی مخرج است و مخرج هر دو کسر هم همگن می‌باشند، برای $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ با توجه

به اینکه مجموع توان صورت (یعنی ۴) از تک تک توان‌های مخرج (یعنی ۲) بیشتر است، بنابراین این حد موجود و برابر صفر است.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \sim \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

برای حد دوم هم در نزدیکی مبدأ از هم‌ارزی $\sin u \sim u$ خواهیم داشت:

۱۸- گزینه «۲» چون ضابطه f در مبدأ تغییر می‌کند، برای محاسبه مشتق جهتی از تعریف مشتق جهتی استفاده می‌کنیم.

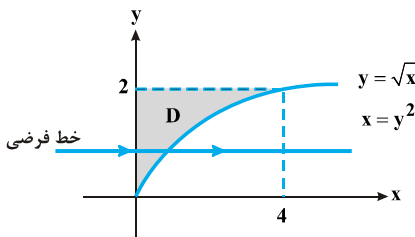
مشتق جهتی تابع $f(x, y)$ در جهت بردار یکه $\vec{u} = (u_1, u_2)$ در نقطه دلخواه (x_0, y_0) برابر است با:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{\sqrt{3}}{2}h, \frac{1}{2}h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}h)^2 (\frac{1}{2}h)}{\frac{3}{4}h^2 + \frac{1}{4}h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}h^3}{(h^2)(h)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۱۹- گزینه «۳» با توجه به اینکه انتگرال داده شده به این فرم قابل حل نیست و همچنین تابع زیر

انتگرال فقط تابعی از y است، باید ترتیب انتگرال را عوض کنیم، برای این منظور بهتر است ابتدا

ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را رسم کنیم. یعنی داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \int_0^{y^2} \sin y^2 dx dy \Rightarrow I = \int_0^2 y^2 \sin y^2 dy$$

$$y^2 dy = du, \quad 0 \leq u \leq 4 \Rightarrow I = \int_0^4 \frac{1}{3} \sin u du = -\frac{1}{3} (\cos u)_0^4 = -\frac{1}{3} (\cos 4 - 1) = \frac{1 - \cos 4}{3}$$

با تغییر متغیر $y^2 = u$ داریم:

۲۰- گزینه «۱» با توجه به این که مسیر C یک ناحیه‌ی ساده‌ی بسته است، از قضیه‌ی گرین کمک می‌گیریم:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (\lambda - \delta) dA = 2 \iint_D dA$$

$$I = 2(\pi(2)) = 4\pi$$

انتگرال نهایی، مساحت درون ناحیه‌ی C یعنی داخل یک دایره به شعاع $\sqrt{2}$ است پس داریم:

۲۱- گزینه «۲» کافی است از قاعده‌ی مشتق‌گیری ضمنی توابع چند متغیره به فرم $F(x, y, z) = C$ کمک بگیریم، در این حالت داریم:

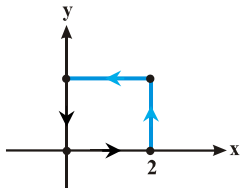
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_x} \\ \frac{\partial y}{\partial z} &= -\frac{F_z}{F_y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial z} = \left(-\frac{F_x}{F_z} \right) \left(-\frac{F_y}{F_x} \right) \left(-\frac{F_z}{F_y} \right) = -1$$

۲۲- گزینه «۳» منحنی C یک مرز بسته است. پس با کمک قضیه گرین داریم:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (e^x - ke^x) dA = (1-k) \iint_D e^x dx dy = 0$$

با توجه به اینکه تابع زیر انتگرال یعنی e^x یک عامل همواره مثبت است، پس امکان ندارد مقدار این انتگرال دوگانه صفر شود و برای آنکه تساوی فوق برقرار باشد باید ضریب انتگرال صفر شود (یعنی $1-k=0$) و این یعنی $k=1$ باشد.

۲۳- گزینه «۱» یک راه‌حل این سؤال، پارامتری‌سازی منحنی و محاسبه انتگرال روی مرز داده شده است. اما اگر کمی دقت کنید، واضح است که مربع داده شده یک مربع روی صفحه $z = 0$ است. یعنی در واقع با مربع روبه‌رو سروکار داریم:



با توجه به این که $P = yz$ و $Q = xz$ و $R = xy$ می‌باشند، شرط پایستار بودن میدان F را بررسی می‌کنیم.

$$\text{Curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

با توجه به این که $\text{curl } \vec{F} = 0$ می‌باشد با یک میدان پایستار روبه‌رو هستیم و چون مسیر بسته است، حاصل انتگرال صفر خواهد بود.

۲۴- گزینه «۴» انحناى منحنى $\vec{r}(t)$ از رابطه $\kappa = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$ به دست می‌آید. منحنى $\vec{r}(t)$ به ازای $t = 0$ از نقطه $(2, 0, 2)$ می‌گذرد و داریم:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t, -4 \sin 2t) \xrightarrow{t=0} (0, 2, 0) \\ \vec{r}''(t) &= (-2 \cos t, -2 \sin t, -8 \cos 2t) \xrightarrow{t=0} (-2, 0, -8) \\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \vec{i}(-16) - \vec{j}(0) + \vec{k}(4) = (-16, 0, 4) \\ |\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| &= \sqrt{256 + 16} = \sqrt{272} \\ |\vec{r}'(t)| &= \sqrt{0 + 4 + 0} = 2 \\ \kappa &= \frac{\sqrt{272}}{8} = \frac{\sqrt{4 \times 68}}{8} = \frac{2\sqrt{68}}{8} = \frac{\sqrt{68}}{4} = \frac{2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

۲۵- گزینه «۳» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: با یک فضای سه بعدی بسته روبه‌رو هستیم، پس می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، اما یک مشکل وجود دارد! فرم تابع زیر انتگرال به صورت $\vec{F} \cdot \vec{n}$ نیست؛ ولی می‌توانیم به سادگی این فرم را بسازیم. برای چنین رویه‌ای که معادله‌ی آن $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است، بردار نرمال یکه $\vec{n}$ به صورت زیر است:

$$\vec{n} = \frac{(2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + (2z)\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} \Rightarrow \vec{n} = \frac{2(x, y, z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x, y, z)$$

حالا با فرض $\vec{F} = (P, Q, R)$ و تشکیل $\vec{F} \cdot \vec{n}$ داریم:

حالا این عبارت باید مساوی تابع زیر انتگرال باشد. یعنی:
راحت‌ترین انتخاب، برای ایجاد یک دیورژانس با حاصل عددی، $P = 2z$ ، $Q = ky$ و $R = 0$ است. حالا داریم:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (2z, ky, 0) \\ I &= \iiint_V (\text{div } \vec{F}) dv = \iiint_V (0 + k + 0) dv = k \iiint_V dv \\ I &= k \times \frac{4}{3} \pi (1)^3 = \frac{4}{3} \pi k \Rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

انتگرال نهایی حجم کره‌ای به شعاع ۱ است. پس داریم:

روش دوم: اگر بخواهیم حاصل انتگرال را در همین حالت اسکالر برای f حل کنیم، با توجه به این که برای نیمکره $z \geq 0$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ مقدار

$$d\sigma \text{ برابر } \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA \text{ می‌باشد، حاصل } \iint_S f d\sigma \text{ را به دست می‌آوریم و سپس آن را دو برابر می‌کنیم و داریم:}$$

$$\iint (\gamma xz + ky^2) d\sigma = 4\pi$$

قسمت اول انتگرال نسبت به x فرد می‌باشد و با توجه به متقارن بودن کره حاصل آن صفر می‌شود و فقط باید حاصل قسمت دوم را محاسبه کنیم و از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، چون تصویر کره بر صفحه xoy دایره $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد و داریم:

$$\begin{aligned} k \iint y^2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dy dx &= 4\pi \Rightarrow \text{در مختصات قطبی} \\ k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - r^2}} r dr d\theta &\xrightarrow{1 - r^2 = u, \quad r^2 = 1 - u, \quad 1 \leq u \leq 0} k \int_0^{2\pi} \int_1^0 \frac{1 - u}{\sqrt{u}} \left(-\frac{du}{2}\right) \sin^2 \theta d\theta = -\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} (u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= -\frac{k}{2} \left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_1^0 \left(\frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)\right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{k}{2} \left(-\frac{4}{3}\right) (\pi) \xrightarrow{\times 2} \frac{4k\pi}{3} = 4\pi \Rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

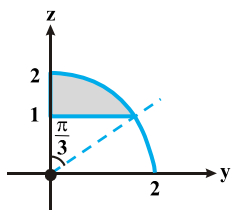
$$\vec{C}(t) = (r \cos t, r \sin t, r) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{r}$$
$$I = \int_C f ds$$

$$ds = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2 + 0^2} \, dt = \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt = r \, dt$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (r \cos t)(r \sin t)(r)(r dt) = 12 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r \sin t \cos t dt = 12 (\sin^2 t)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 12(1-0) = 12$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V (\operatorname{div} \vec{F}) \, dv = \iiint_V (y^r + x^r + x^r + y^r) \, dv$$
$$I = \iiint_V (x^r + y^r) \, dv = r \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \int_0^1 (r^r) \, r \, dz \, dr \, d\theta = r \int_0^{\sqrt{\pi}} d\theta \int_0^1 r^r \, dr \int_0^1 dz = r (\sqrt{\pi}) \left(\frac{r^{r+1}}{r+1} \right) \Big|_0^1 = \pi$$

۲۹- گزینه ۳» برای حل این انتگرال کافیست به تابع زیر انتگرال و همچنین حدود آن توجه کنیم؛ با توجه به عامل $x^2 + y^2 + z^2$ در تابع زیر انتگرال و همچنین حدود انتگرال باید از مختصات کروی استفاده کنیم.



حالا برای تعیین حدود φ و ρ داریم:

روی محور z ها داریم $\varphi = 0$ و در محل برخورد $z = 1$ و $y^2 + z^2 = 4$ داریم $y = \sqrt{3}$ و داریم:

$$\varphi = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{z}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) = \frac{\pi}{r} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{r}$$

$$z=1 \Rightarrow \rho \cos \varphi=1 \Rightarrow \frac{1}{\cos \varphi} \leq \rho \leq 2$$

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_{\frac{\gamma}{\cos \varphi}}^\pi \frac{\rho^\gamma \sin \varphi}{\rho^\gamma} d\rho d\varphi d\theta = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_{\frac{\gamma}{\cos \varphi}}^\pi \sin \varphi \left(\gamma - \frac{1}{\cos \varphi} \right) d\varphi d\theta$$

$$= \frac{\pi}{r} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi \right) = \frac{\pi}{r} ((-r \cos \varphi) + \ln |\cos \varphi|) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{r}(-r \cos \frac{\pi}{r} + \text{Ln}(\cos \frac{\pi}{r}) - (-r))$$

$$\frac{\pi}{\gamma}(-\gamma(\frac{1}{\gamma}) + \text{Ln}(\frac{1}{\gamma}) + \gamma) = \frac{\pi}{\gamma}(1 + \text{Ln}\frac{1}{\gamma}) = \frac{\pi}{\gamma}(1 - \text{Ln}\gamma)$$



۳۰- گزینه «۴» اگر به معادلات پارامتری خم C دقت شود، می‌توان دید که $x^2 + y^2 = 4$ است. همچنین $z = \frac{1}{4}x + 4$ در واقع خم C مرز بخشی از صفحه‌ی $S: z = \frac{1}{4}x + 4$ است که درون $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد. با استفاده از قضیه استوکس برای میدان برداری $\vec{F}$ ، می‌توان انتگرال روی مرز را به انتگرال روی سطح S تبدیل کرد. ابتدا $\text{Curl } \vec{F}$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{Curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + e^z & 4x & e^{z^2} \cos^2 z \end{vmatrix} = (0, 2z + e^z, 4)$$

حالا $\vec{n} d\sigma$ را برای رویه‌ی $g: \frac{1}{4}x + 4 - z = 0$ تعیین می‌کنیم. دقت کنید $\vec{P} = \vec{k}$ و لذا $|\vec{\nabla} g \cdot \vec{P}| = 1$ پس داریم:

$$\vec{n} d\sigma = \pm \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{P}|} dA = \pm \frac{(\frac{1}{4}, 0, -1)}{1} dA$$

برای تعیین مثبت یا منفی بودن، با توجه به اینکه روی مرز و در جهت مثلثاتی حرکت می‌کنیم، پس باید جهت قائم رو به خارج به سمت بالا باشد و این یعنی ضریب نهایی $\vec{k}$ مثبت باشد، پس باید علامت منفی را انتخاب کنیم:

$$\vec{n} d\sigma = -(\frac{1}{4}, 0, -1) = (-\frac{1}{4}, 0, 1) \Rightarrow \text{Curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = (0, 2z + e^z, 4) \cdot (-\frac{1}{4}, 0, 1) = 4$$

$$I = \iint_S \text{Curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D 4 dy dx = 4 \iint_D dy dx$$

ناحیه D تصویر S بر صفحه xoy است و توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ مشخص می‌شود، پس برای مقدار انتگرال نهایی، مقدار مساحت درون یک دایره به

$$I = 4(\pi(2)^2) = 16\pi$$

شعاع ۲ را داریم. یعنی:

سؤالات رشته‌ی عمران

۱- اگر $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ باشد، حاصل عبارت $A = z + z^2 + z^3 + z^4$ کدام است؟ $(i = \sqrt{-1})$

- (۱) -۱ (۲) -i (۳) +۱ (۴) +i

۲- حاصل $\int_{-1}^1 |xe^x| dx$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{2}{e}$ (۳) $2 - \frac{2}{e}$ (۴) $2 + \frac{2}{e}$

۳- مساحت محصور به دو منحنی $f(x) = e^x$ و $g(x) = e^{e^x+x}$ در فاصله $[0, 1]$ کدام است؟

- (۱) $e^e - 1$ (۲) $e^e + 1$ (۳) $e^e - 2e + 1$ (۴) $e^e + 2e + 1$

۴- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+2) - \sin n}{\cos(n+2) + \cos n}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\tan 1$ (۳) $\cot 1$ (۴) موجود نیست.

۵- در ارتباط با همگرایی و واگرایی سری‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1398}, B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

- (۱) A همگرا و B واگرا (۲) A واگرا و B همگرا (۳) هر دو همگرا (۴) هر دو واگرا

۶- کدام یک از موارد زیر معادلات صفحه مماس و خط قائم بر بیضی گون $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ در نقطه $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{4\sqrt{5}}{3})$ هستند؟

- (۱) صفحه مماس $\frac{2\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{4\sqrt{5}}{3}z = \frac{101}{9}$ و خط قائم $\frac{3x - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = y - 1 = \frac{3z - 4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$
 (۲) صفحه مماس $\frac{2\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{4\sqrt{5}}{3}z = \frac{101}{9}$ و خط قائم $\frac{3x - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 9(y - 1) = \frac{3z - 4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$
 (۳) صفحه مماس $\frac{2\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{4\sqrt{5}}{3}z = 2$ و خط قائم $\frac{3x - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9(y - 1)}{2} = \frac{6z - 8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
 (۴) صفحه مماس $\frac{2\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{4\sqrt{5}}{3}z = \frac{17}{9}$ و خط قائم $\frac{3x - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 9(y - 1) = \frac{6z - 8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

۷- اگر $u = \ln \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ باشد حاصل $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $3u$ (۳) $3 \ln u$ (۴) $3e^u$

۸- حاصل انتگرال $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} |x| dx dy dz$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi a^4}{2}$ (۳) πa^4 (۴) $2\pi a^4$

۹- مقدار $\int_0^1 \int_0^{1-y} e^{(x^2-2x)} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e-1}{2}$ (۲) $e-1$ (۳) $\frac{e-1}{e}$ (۴) $\frac{e-1}{2e}$

۱۰- رویه S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4$ می‌باشد که در بالای صفحه $z = 0$ قرار دارد. انتگرال $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$ کدام است؟ $\vec{n}$ بردار عمود

بر S و به طرف بیرون سطح کروی بوده و $\vec{F}(x, y, z) = (xe^{z^2-2z}, \frac{1}{x} + y + \sin xyz, e^{z^2} \sin z^2)$ به صورت می‌باشد.

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

پاسخنامه رشته‌ی عمران

۱- گزینه «۱» سؤال یک روش نامناسب و یک روش استاندارد دارد. در روش نامناسب می‌توان در رابطه A ، به جای z مساوی آن یعنی $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ و با استفاده از فرمول $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ محاسبات را انجام داد و به جواب رسید که این روش زمان‌بر است. روش استاندارد: همان‌طور که در متن کتاب ریاضی (۱) نمونه‌های زیادی شبیه این سؤال حل کرده‌ایم، از فرمول مجموع جملات تصاعد هندسی استفاده می‌کنیم و با اضافه و کم کردن عدد ۱ به عبارت A داریم:

$$A = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) - 1$$

واضح است عبارت داخل پرانتز یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_1 = 1$ و قدر نسبت $q = z$ می‌باشد، که می‌دانیم حاصل جمع n جمله‌ی اول آن برابر $S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$ است. در این عبارت $n = 5$ و لذا داریم:

$$\text{عبارت داخل پرانتز} = \frac{1 \times (1 - z^5)}{1 - z} = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - (e^{\frac{2\pi i}{5}})^5}{1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}} = \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}} = \frac{1 - (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}{1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}} = 0$$

$$A = 0 - 1 = -1$$

بنابراین حاصل کل عبارت برابر است با: البته می‌توان از همان ابتدا هم بدون اضافه و کم کردن عدد یک سؤال را حل کرد. با توجه به این‌که عبارت داده شده مجموع چهارجمله‌ی اول یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول z و قدر نسبت z می‌باشد و با توجه به این‌که مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول t_1 و قدر نسبت q از رابطه‌ی $S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید، داریم:

$$A = \frac{z(1 - z^4)}{1 - z} = \frac{z - z^5}{1 - z} \xrightarrow{z = e^{\frac{2\pi i}{5}}} A = \frac{e^{\frac{2\pi i}{5}} - (e^{\frac{2\pi i}{5}})^5}{1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}} \Rightarrow A = \frac{e^{\frac{2\pi i}{5}} - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{5}} - 1}{1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}} = -1$$

توجه داشته باشید که $e^{2\pi i} = \underbrace{\cos 2\pi + i \sin 2\pi}_1 = 1$ می‌باشد.

۲- گزینه «۳» وقتی با یک عبارت شامل قدر مطلق درون انتگرال روبه‌رو می‌شویم، اولین کار شکستن بازه انتگرال‌گیری در نواحی مثبت و منفی است. به ازای $0 < x \leq 1$ عبارت xe^{-x} منفی و به ازای $0 < x \leq 1$ عبارت مثبت است، لذا داریم:

$$I = \int_{-1}^1 |xe^x| dx = \int_{-1}^0 -xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx$$

حالا به روش جزء‌به‌جزء جدولی هر دو انتگرال را حل می‌کنیم:

$-x$	e^x
$\downarrow$	$\oplus$
-1	e^x
$\downarrow$	$\ominus$
0	e^x

$$\Rightarrow I_1 = [-xe^x + e^x]_{-1}^0 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

x	e^x
$\downarrow$	$\oplus$
1	e^x
$\downarrow$	$\ominus$
0	e^x

$$\Rightarrow I_2 = [xe^x - e^x]_0^1 = 1$$

بنابراین $I = I_1 + I_2 = 2 - \frac{2}{e}$ خواهد بود.

۳- گزینه «۳» ابتدا طبق فرمول مساحت یعنی $S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$ داریم:

$$S = \int_0^1 (e^{e^x + x} - e^x) dx = \int_0^1 (e^{e^x} \cdot e^x - e^x) dx = \int_0^1 (e^{e^x} - 1) e^x dx$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $e^x = u$ کمک می‌گیریم و لذا $e^x dx = du$ می‌باشد.

از طرفی به ازای $x = 0$ داریم $u = e^0 = 1$ و به ازای $x = 1$ داریم $u = e^1 = e$ و در نهایت داریم:

$$S = \int_1^e (u - 1) du = [e^u - u]_1^e = (e^e - e) - (e^1 - 1) = e^e - 2e + 1$$

۴- گزینه «۲» اگر از هم‌ارزی $n \sim (n+2)$ استفاده کنیم، جمع جبری در صورت کسر صفر می‌شود و می‌دانیم این‌گونه استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست؛ از فرمول جمع به ضرب کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} \sin(n+2) - \sin n = 2 \sin\left(\frac{(n+2)-n}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+2)+n}{2}\right) = 2 \sin(1) \cos(n+1) \\ \cos(n+2) + \cos n = 2 \cos\left(\frac{(n+2)+n}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+2)-n}{2}\right) = 2 \cos(1) \cos(n+1) \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(1) \cos(n+1)}{2 \cos(1) \cos(n+1)} = \frac{2 \sin(1)}{2 \cos(1)} = \tan(1)$$

۵- گزینه «۴» سؤال بسیار راحتی است. به وضوح سری A واگراست، چون با استفاده از هم‌ارزی در بی‌نهایت $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به دست می‌آید که این سری همواره واگراست. اما در مورد سری B هم کار راحت است، چون که سری اصلاً شرط لازم برای همگرایی را ندارد، به این دلیل که حد جمله‌ی عمومی مخالف صفر است. (دقت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^3} \neq 0$ ، چون رشد جمله‌ی 2^n بسیار بیشتر از n^3 در مخرج کسر است.) بنابراین سری B هم واگراست.

۶- گزینه «۳» ابتدا بردار نرمال صفحه را مشخص می‌کنیم که همان گرادیان رویه است.

$$\nabla f = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, \frac{z}{8} \right) \xrightarrow{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{4\sqrt{5}}{3} \right)} \nabla f \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{4\sqrt{5}}{3} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{9}, \frac{\sqrt{5}}{6} \right)$$

بنابراین صفحه‌ی مماس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) + \frac{2}{9} (y - 1) + \frac{\sqrt{5}}{6} \left(z - \frac{4\sqrt{5}}{3} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} x + \frac{2}{9} y + \frac{\sqrt{5}}{6} z = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} x + \frac{2}{9} y + \frac{\sqrt{5}}{6} z = 2$$

همین جا کار تمام است و می‌توان گزینه «۳» را انتخاب کرد. چون تنها گزینه‌ای است که این معادله صفحه را دارد.

اما اگر بخواهیم برای تمرین معادله خط قائم را هم حساب کنیم، داریم:

$$\frac{x - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{y - 1}{\frac{2}{9}} = \frac{z - \frac{4\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{6}} \Rightarrow \frac{3x - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9(y - 1)}{2} = \frac{6z - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

۷- گزینه «۱» از سؤالات نسبتاً پر تکرار از مبحث فرمول اویلر می‌باشد، نمونه‌های زیادی در متن کتاب حل شده است و البته این سؤال عیناً برای رشته‌ی MBA در سال ۸۸ مطرح شده بود. ابتدا نکته‌ی کتاب را یادآوری می‌کنیم.

نکته: اگر $F(u) = f(x, y)$ آنگاه حاصل $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ برابر با $\frac{F(u)}{F'(u)}$ است که n درجه‌ی همگنی f است. حال داریم:

$$u = \ln \frac{x^4 + y^4}{x + y} \Rightarrow e^u = \frac{x^4 + y^4}{x + y}$$

حالا با فرض $F(u) = e^u$ و $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x + y}$ ملاحظه می‌کنید درجه‌ی همگنی f برابر با ۳ است و $\frac{F(u)}{F'(u)} = \frac{e^u}{e^u} = 1$ و لذا حاصل عبارت خواسته شده برابر با $3 \times 1 = 3$ است.

البته اگر نکته را ندانید هم کار سخت نیست؛ می‌توانید $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ را جداگانه و به روش عادی محاسبات را انجام داده و به جواب برسید.

۸- گزینه «۲» با توجه به این که ناحیه انتگرال گیری بر روی کره به شعاع a می باشد، برای حل انتگرال از مختصات کروی استفاده می کنیم و داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a |\rho \sin \phi \cos \theta| |\rho^2 \sin \phi| d\rho d\phi d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^3 |\sin \phi| |\cos \theta| \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \left(\frac{\rho^4}{4}\right)_0^a \left(\int_0^{\pi} \sin^2 \phi d\phi\right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta\right)$$

در بازه صفر تا π مقدار سینوس مثبت است و قدرمطلق را برمی داریم و داریم:

$$I = \left(\frac{a^4}{4}\right) \left(\int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2}\right) d\phi\right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta\right) = \frac{a^4}{4} \left(\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi\right)_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta\right)$$

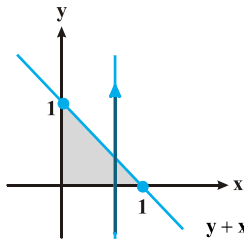
اکنون باید طبق ریشه های $\cos \theta$ در بازه صفر تا 2π ، انتگرال را بشکنیم و داریم:

$$\Rightarrow I = \frac{\pi a^4}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos \theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos \theta d\theta\right) = \frac{\pi a^4}{4} \left((\sin \theta)_0^{\frac{\pi}{2}} - (\sin \theta)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + (\sin \theta)_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi a^4}{4} (1 - (-1 - 1) + (0 + 1)) = \frac{\pi a^4}{4} (4) = \pi a^4$$

۹- گزینه «۴» با توجه به این که از تابع زیر انتگرال نسبت به x نمی توان انتگرال گرفت، باید جای المان های dx و dy را عوض کنیم و با توجه به ناحیه

انتگرال گیری داریم:



$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{x^2 - 2x} dy dx = \int_0^1 e^{x^2 - 2x} (y)_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^2 - 2x} (1 - x) dx \xrightarrow{(x^2 - 2x) = u, (2x - 2) dx = du} -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} (e^{x^2 - 2x})_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e}{e}\right) = \frac{e - 1}{2e}$$

۱۰- گزینه «۴» با توجه به این که محل تلاقی صفحه $Z = 0$ و کره $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4$ یک دایره به صورت $x^2 + y^2 = 1$ می باشد و معادله پارامتری

این دایره به صورت $x = \cos t$ و $y = \sin t$ می باشد، در این سؤال بهتر است برخلاف روال معمول که انتگرال خط را به انتگرال سطح تبدیل می کنیم، این بار انتگرال سطح را به انتگرال خط تبدیل کنیم و داریم:

$$z = 0 \Rightarrow \vec{F}(x, y, z) = \left(x, \frac{1}{x}, y, 0\right)$$

$$\vec{c}(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow \vec{c}'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$I = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{c}(t)) \cdot \vec{c}'(t) dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \left(\cos t, \frac{1}{\cos t} + \sin t\right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + 1 + \sin t \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = (t)_0^{2\pi} = 2\pi$$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱- حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$ ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $2e$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{e}$

۲- معادله خط مماس بر منحنی $y^x + x^y = 2$ در نقطه $(1,1)$ کدام است؟

- (۱) $x + y = 2$ (۲) $2x - y = 1$ (۳) $3x - y = 2$ (۴) $2x + y = 3$

۳- زاویه بین خطوط مماس بر منحنی‌های قطبی $r = 2(1 + \sin \theta)$ و $r = 2(1 - \sin \theta)$ در محل تقاطع، برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۴- ضریب x^9 در بسط مکلورن تابع $\frac{\sin x}{1+x}$ به ازای $|x| < 1$ ، کدام است؟

- (۱) $1 - \frac{1}{5!} - \frac{1}{9!}$ (۲) $1 + \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!}$ (۳) $1 + \frac{1}{5!} - \frac{1}{9!}$ (۴) $1 - \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!}$

۵- شعاع (R) و بازه همگرایی (D) سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sinh(2n)$ ، کدام است؟

- (۱) $R = e^{-2}$ ، $D = [-e^{-2}, e^{-2}]$ (۲) $R = e^{-2}$ ، $D = (-e^{-2}, e^{-2})$
(۳) $R = e^2$ ، $D = [-e^2, e^2]$ (۴) $R = e^2$ ، $D = (-e^2, e^2)$

۶- کدام مورد برای تابع $F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ درست است؟

- (۱) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = -2$ (۲) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0)$
(۳) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = -2$ (۴) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0)$ وجود ندارند.

۷- کدام عبارت برای $\int_1^{\infty} \frac{x - \ln x}{\sqrt{x}^n} dx, (n \in \mathbb{N})$ ، درست است؟

- (۱) به ازای $n \geq 2$ همگرا است. (۲) به ازای $n \geq 3$ همگرا است. (۳) به ازای $n \geq 4$ همگرا است. (۴) به ازای $n \geq 5$ همگرا است.

۸- اگر (a,b) مرکز ثقل ناحیه محدود به منحنی $y = \cos x$ در ناحیه اول صفحه مختصات باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4} + 1$ (۲) $\frac{3\pi}{4} + 1$ (۳) $\frac{3\pi}{8} - 1$ (۴) $\frac{5\pi}{8} - 1$

۹- اگر D ناحیه درون قرص $x^2 + y^2 \leq e^2 - 1$ باشد، حاصل $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\pi(e^2 - 1)$ (۲) $\pi(e^2 + 1)$ (۳) $e^2 - 1$ (۴) $e^2 + 1$

۱۰- شار گذرا از سطح پوسته $y = x + 1$ محدود به بازه‌های $0 \leq z \leq 1$ و $0 \leq z \leq 1$ توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j} + \tan^{-1} z\hat{k}$ به سمت صفحه yz ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{2}}$



پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱- گزینه «۴» با توجه به وجود $n!$ در زیر رادیکال با فرجه n از هم‌ارزی استرلینگ استفاده می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$\sqrt[n]{(an+b)!} \sim \left(\frac{an}{e}\right)^a \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{n!} \quad n \rightarrow +\infty$$

که البته هم‌ارزی دوم با فرض $a=1$ و $b=0$ از هم‌ارزی اول نتیجه می‌شود. پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \times \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\frac{n}{e}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2}{e^2}}{\frac{2n^2}{e^2}} = \frac{4e}{2e} = 2$$

توجه: سؤال با کمی تغییر (فقط به جای $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ پشت رادیکال $\frac{1}{n}$ قرار داشت) در سال ۸۵ برای رشته مکانیک طرح شده بود و ضمناً نمونه بسیار شبیه آن در متن کتاب وجود داشت.

۲- گزینه «۱» با یک سؤال از بحث مشتق‌گیری ضمنی روبه‌رو هستیم. مشتق تابع نسبت به x با فرض y عدد ثابت = شیب خط مماس y'_x مشتق تابع نسبت به y با فرض x عدد ثابت

$$\text{فرمول مشتق‌گیری ضمنی به شکل مقابل است:} \quad m(1,1) = -\frac{0+1}{1} = -1 \quad \text{شیب در نقطه } (1,1) \rightarrow \frac{y^x \ln y + x y^{y-1}}{x y^{x-1} + x^y \ln x}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{(x_0, y_0) = (1,1)} y - 1 = (-1) \times (x - 1) \Rightarrow y + x = 2 \quad \text{بنابراین معادله خط مماس به شکل مقابل است:}$$

توجه مهم: حل فوق روش تشریحی و استاندارد برای سؤال بود. اما در متن کتاب ریاضی عمومی (۱) نکته زیر را داریم:

هرگاه در تابع $f(x, y)$ با تبدیل x به y و y به x ضابطه $f(x, y)$ تغییر نکند (مانند همین سؤال که $2 - x^y + y^x = f(x, y)$ است). آنگاه مقدار مشتق ضمنی تابع در نقطه (a, a) همواره برابر با -1 است و نیاز به محاسبه شیب خط نیست (در این سؤال $a=1$ است).

۳- گزینه «۳» سؤال عیناً مربوط به رشته MBA در سال ۸۹ است. ابتدا محل تلاقی دو منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$2(1 + \sin \theta) = 3(1 - \sin \theta) \Rightarrow 5 \sin \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{f_1'(\theta)}{f_1''(\theta)} = \frac{2(1 + \sin \theta)}{2 \cos \theta} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{24}}{5}} = \frac{6}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \phi_2 = \frac{f_2'(\theta)}{f_2''(\theta)} = \frac{3(1 - \sin \theta)}{-3(\cos \theta)} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{-\frac{\sqrt{24}}{5}} = \frac{4}{-\sqrt{24}} = \frac{-\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \phi_1 - \operatorname{tg} \phi_2}{1 + \operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{tg} \phi_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

۴- گزینه «۴» از سؤالات پرتکرار در آزمون‌های کارشناسی ارشد است. برای پاسخ به این سؤال باید دو بسط زیر را بلد باشد:

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots \Rightarrow \frac{1}{1+x^6} = 1 - x^6 + x^{12} - \dots \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\sin x}{1+x^6} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots\right) (1 - x^6 + x^{12} - \dots)$$

جمله x^9 از ضرب سه عبارت نشان داده شده پدید می‌آید:

$$x^9 \text{ شامل جملات } = x \times x^6 + \frac{x^5}{5!} \times (-x^4) + \frac{x^9}{9!} \times 1 = \left(1 - \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!}\right) x^9 \Rightarrow x^9 \text{ ضریب } = 1 - \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!}$$

۵- گزینه «۲» عیناً سؤال متن کتاب ریاضی عمومی (۱) است.

ابتدا با توجه به رابطه $\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ سری را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sinh(\gamma n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\gamma n} - e^{-\gamma n}}{2} \right) x^n$$

حالا توجه کنید که جمله‌ی عمومی به صورت $a_n = \frac{e^{\gamma n} - e^{-\gamma n}}{2}$ است. هرگاه $n \rightarrow \infty$ داریم: $\frac{e^{\gamma n} - e^{-\gamma n}}{2} \approx \frac{e^{\gamma n}}{2}$ ، بنابراین با محاسبه‌ی شعاع همگرایی داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{\gamma n}}{2}} = e^\gamma \Rightarrow R = \frac{1}{e^\gamma}$$

ناحیه‌ی همگرایی به صورت $|x| < R$ است؛ پس $-\frac{1}{e^\gamma} < x < \frac{1}{e^\gamma}$ و البته نقاط ابتدا و انتهای بازه را باید جداگانه بررسی کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\gamma n} - e^{-\gamma n}}{2} \left(\frac{1}{e^\gamma} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\gamma n}}{2} \right) \frac{1}{e^{\gamma n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

به ازای $x = \frac{1}{e^\gamma}$ داریم:

این سری واگراست چون جمله عمومی آن همگرا به صفر نیست. به ازای $x = -\frac{1}{e^\gamma}$ نیز با وضعیت مشابهی روبه‌رو می‌شویم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\gamma n} - e^{-\gamma n}}{2} \left(-\frac{1}{e^\gamma} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\gamma n}}{2} \right) \frac{(-1)^n}{e^{\gamma n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$$

باز هم جمله عمومی به صفر میل نمی‌کند، پس سری واگراست. بنابراین بازه همگرایی برابر با $\left(-\frac{1}{e^\gamma}, \frac{1}{e^\gamma} \right)$ است.

۶- گزینه «۱» ابتدا $\frac{\partial F}{\partial x}$ یعنی F_x را به دست می‌آوریم که برای محاسبه آن در مبدأ باید از تعریف مشتق جزئی استفاده کنیم، (چون ضابطه F در مبدأ تغییر

$$F_x(\circ, \circ) = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{F(h, \circ) - F(\circ, \circ)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\circ - \circ}{h} = \circ$$

می‌کند)، پس داریم:

برای محاسبه F_x در سایر نقاط به جز مبدأ، فقط کافی است از ضابطه بالایی $F(x, y)$ نسبت به x مشتق بگیریم.

$$F_x = \frac{(6x^5y - 2y^3)(x^2 + y^2) - 2x(2x^3y - 2xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{6x^7y + 6x^3y^3 - 2x^4y^2 - 2y^5 - 4x^4y + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^4y + 4x^2y^3 - 2y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

پس ضابطه F_x به صورت زیر در می‌آید:

$$F_x = \begin{cases} \frac{2x^4y + 4x^2y^3 - 2y^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

اکنون اگر F_x به دست آمده را به عنوان یک تابع بر حسب x و y در نظر بگیریم، می‌توانیم مشتق جزئی آن را نسبت به y در مبدأ با استفاده از تعریف مشتق

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\circ, \circ) = F_{xy}(\circ, \circ) = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{F_x(\circ, h) - F_x(\circ, \circ)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{\frac{-2h^5}{h^4} - \circ}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{-2h^5}{h^5} = -2$$

جزئی محاسبه کنیم:

پس $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\circ, \circ) = -2$ می‌باشد و این یعنی گزینه (۱) صحیح است.

توجه داشته باشید که گزینه‌های (۲) و (۳) با هم برابر هستند و نمی‌توانند صحیح باشند و با توجه به وجود داشتن مقدار $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ که برابر -۲ می‌باشد، گزینه

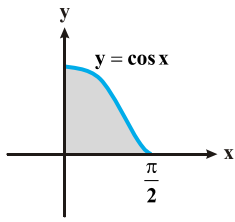
(۴) نیز صحیح نمی‌باشد.

۷- گزینه «۴» انتگرال‌های به فرم $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ برای $p > 1$ همگراست و برای $p \leq 1$ واگرا می‌باشد. وقتی $x \rightarrow +\infty$ در صورت کسر از $\ln x$ در

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^{\frac{n}{2}}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{n}{2}-1}} dx \xrightarrow{\text{باید}} \frac{n}{2} - 1 > 1 \Rightarrow \frac{n}{2} > 2 \Rightarrow n > 4 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 5$$

مقابل x صرف نظر می‌کنیم و داریم:

۸- گزینه «۳» مرکز ثقل ناحیه مسطحی که به محور x ها و نمودار تابع $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ محدود است از روابط زیر به دست می‌آید:



$$\bar{X} = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy \, dx}{S}, \quad \bar{Y} = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx}{S}$$

که S مساحت ناحیه محدود داده شده می‌باشد.

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = (\sin x)_0^{\pi/2} = 1$$

در این مثال مساحت S برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx}{1} = \frac{\pi}{2} - 1$$

توجه داشته باشید که با توجه به اینکه ناحیه اول در صورت سؤال ذکر شده، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

صورت کسر را با استفاده از روش جزء به جزء جدولی به دست آورده‌ایم:

x	$\cos x$
1	$\sin x$
0	$-\cos x$

$$\Rightarrow (x \sin x + \cos x)_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx}{1} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}$$

برای محاسبه $\bar{Y}$ داریم:

$$a - b = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 1$$

پس (a, b) برابر است با $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8})$ و $a - b$ برابر است با:

۹- گزینه «۲» با توجه به اینکه ناحیه انتگرال‌گیری بر روی دایره می‌باشد و در تابع زیر انتگرال نیز عامل $x^2 + y^2$ داریم، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم و داریم:

$$0 \leq r \leq \sqrt{e^2 - 1}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

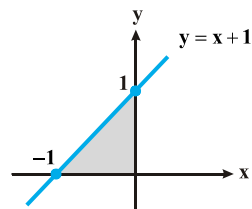
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{e^2-1}} \ln(1+r^2) r \, dr \, d\theta \xrightarrow[r \, dr = du]{1+r^2=u} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{e^2-1}} \ln(u) \, du \, d\theta$$

$$\text{اگر } r=0 \Rightarrow u=1, \quad r=\sqrt{e^2-1} \Rightarrow u=e^2$$

با توجه به اینکه $\int \ln u \, du = u \ln u - u$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{1}{2} (u \ln u - u)_1^{e^2} (\theta)_0^{2\pi} = \frac{1}{2} ((e^2 \ln e^2 - e^2) - (0 - 1)) (2\pi) = \frac{1}{2} (2e^2 - e^2 + 1) (2\pi) = \pi(e^2 + 1)$$

۱۰- گزینه «۱» رویه $g: y - x - 1 = 0$ را در نظر می‌گیریم و داریم:



$$\nabla g = (-1, 1, 0) \rightarrow |\nabla g| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

بردار $\vec{n}$ برابر است با:

$$\vec{n} = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \pm \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}$$

با توجه به اینکه نیروی F به سمت صفحه yz می‌باشد، پس در بازه $0 \leq x \leq 1$ داریم:

$$\vec{n} = + \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

(چون مؤلفه اول $\vec{n}$ منفی می‌باشد، علامت مثبت آن را در نظر می‌گیریم)

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (y - x)$$

اکنون $\vec{F} \cdot \vec{n}$ را به دست می‌آوریم و داریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S ds$$

با توجه به اینکه روی سطح پوسته $y - x = 1$ می‌باشد، داریم:

$$ds = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{P}|} dA = \frac{\sqrt{2}}{1} dA \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2} \, dx \, dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1$$

س را روی صفحه xz که بردار نرمال آن $\vec{P} = \vec{j}$ می‌باشد تصویر می‌کنیم و داریم:

سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱- مقدار $(1 + \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5})^5 + i(1 + \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5})^5$ کدام است؟ $(i^2 = -1)$

- (۱) $-i$ (۲) i (۳) 1 (۴) -1

۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{e}$ (۲) 1 (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) $\frac{1}{e^2}$

۳- فرض کنید دنباله (a_n) یکنوا و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. کدام گزینه درباره سری $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ درست است؟

(۱) همگرا است.

(۲) دنباله مجموع جزئی آن یکنوا است، ولی لزوماً کران‌دار نیست.

(۳) دنباله مجموع جزئی آن کران‌دار است، ولی لزوماً همگرا نیست.

(۴) لزوماً جمله عمومی آن به صفر میل نمی‌کند، لذا همگرایی نتیجه نمی‌شود.

۴- کدام گزینه درباره تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sin(\pi(x - [x]))$ درست است؟ $[]$ نماد جزء صحیح است.

(۱) دارای تابع اولیه کران‌دار است.

(۲) پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست.

(۳) مشتق‌پذیر است.

(۴) پیوسته نیست.

۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (e^{-2x} - \frac{1+ax}{1+bx}) = 0$ ، آنگاه مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) 2

۶- مقدار $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e}{3} - 1$ (۲) $\frac{e}{2} + 1$ (۳) $\frac{e}{3} + 1$ (۴) $\frac{e}{2} - 1$

۷- اگر a, b اعداد مثبت باشند، آنگاه طول منحنی تابع $y = a \cosh(\frac{x}{a})$ بر بازه $[-b, b]$ کدام است؟

- (۱) $2a \cosh(\frac{b}{a})$ (۲) $2b \sinh(\frac{b}{a})$ (۳) $2a \sinh(\frac{b}{a})$ (۴) $2b \cosh(\frac{b}{a})$

۸- فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد و داشته باشیم $f(0,1) = 0$ ، $f_x(0,1) = 1$ و $f_y(0,1) = 2$ ، مقدار

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, e^t)}{f(\sin 2t, \cos 2t)}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۹- فرض کنید $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 2y^2\}$. مقدار $\iint_D xy e^{\frac{x^2+y^2}{xy}} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e}{12}$ (۲) $\frac{3e}{4}$ (۳) $\frac{e}{4}$ (۴) $\frac{e}{20}$

۱۰- فرض کنید C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = y + 1$ در جهت راستگرد باشد. مقدار $\oint_C (4z dx - 2x dy + 2x dz)$

کدام است؟

- (۱) 4π (۲) $-2\sqrt{2}\pi$ (۳) -4π (۴) $2\sqrt{2}\pi$



پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۱» با استفاده از فرمول اولر که به صورت‌های $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ و $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ می‌باشد، داریم:

$$A = [(1 + i(\cos \frac{\pi}{\Delta} - i \sin \frac{\pi}{\Delta}))^\Delta] + i[(1 - i(\cos \frac{\pi}{\Delta} + i \sin \frac{\pi}{\Delta}))^\Delta] = (1 + i e^{-\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta + i(1 - i e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta$$

$$A = (1 + \frac{i}{e^{\frac{i\pi}{\Delta}}})^\Delta + i(1 - i e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta = \frac{(1 + e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta}{e^{i\pi}} + i(1 - i e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta \xrightarrow{e^{i\pi} = -1} A = -(1 + e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta + i(1 - i e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta$$

$$A = -i(1 + \frac{1}{i} e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta + i(1 - i e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta$$

اکنون در پرانتز اول از i فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$A = -i(1 - i e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta + i(1 - i e^{\frac{i\pi}{\Delta}})^\Delta$$

با توجه به اینکه $\frac{1}{i} = -i$ می‌باشد، عبارت داخل پرانتز اول عیناً برابر با عبارت داخل پرانتز دوم می‌شود و داریم:

دو عبارت قرینه یکدیگرند و لذا $A = 0$ می‌باشد.

۲- گزینه «۲» این سؤال دقیقاً سؤال کنکور MBA سال ۱۳۹۰ می‌باشد، برای حل این سؤال ابتدا $\frac{1}{n}$ را وارد رادیکال می‌کنیم و سپس از این دنباله $\ln$ می‌گیریم، تا عامل‌های ضرب به جمع تبدیل شوند و داریم:

$$f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n} \times \dots \times \frac{n+n}{n}}$$

$$f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})\dots(1 + \frac{n}{n})}$$

$$\ln f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (\ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(1 + \frac{2}{n}) + \dots + \ln(1 + \frac{n}{n})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{i}{n})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x) dx$$

با استفاده از حد مجموع ریمنی و همچنین با استفاده از رابطه $\int \ln u du = u \ln u - u$ داریم:

$$\ln f(n) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = ((1+x) \ln(1+x) - (1+x)) \Big|_0^1 = (2 \ln 2 - 2) - (-1) = 2 \ln 2 - 1$$

$$\ln f(n) = 2 \ln 2 - 1 \rightarrow f(n) = e^{2 \ln 2 - 1} = e^{\ln 4} \times e^{-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \frac{4}{e}$$

پس در کل داریم:

۳- گزینه «۱» با توجه به این‌که (a_n) یکنوا می‌باشد و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است، پس شرط لازم همگرایی سری یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$ برقرار است. اگر مقدار

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) \xrightarrow{\text{طبق قاعده تل‌سکوپی}} k(a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}) = ka_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (ka_{n+1})$$

همگرایی سری را عدد L که $L \in \mathbb{R}$ می‌باشد قرار دهیم، داریم:

$$ka_1 - 0 = ka_1$$

با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}\}$ می‌باشد، داریم:

که مقدار ka نیز یک عدد عضو $\mathbb{R}$ می‌باشد. پس سری قطعاً همگراست.

۴- گزینه «۳» ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه دلخواه $x = a$ بررسی می‌کنیم و داریم:

$$\text{اگر } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(a) = \sin \pi(a - [a]) = \sin(0) = 0$$

$$\text{اگر } a \notin \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} f(a^+) = \sin \pi(a^+ - [a^+]) = 0 \\ f(a^-) = \sin \pi(a^- - [a^-]) = \sin \pi = 0 \end{cases}$$

پس تابع $f(x)$ در تمام نقاط صحیح پیوسته است.

با توجه به این که $0 \leq x - [x] < 1$ می باشد به ازای اعداد غیر صحیح $1 < x - [x] < 2$ می باشد، اگر مقدار $x - [x]$ را A بنامیم، داریم:

$$\text{اگر } a \notin \mathbb{Z} \rightarrow f(a) = \sin \pi A$$

پس $f(x)$ به ازای عدد غیر صحیح نیز پیوسته است و در کل یک تابع پیوسته است. اکنون برای بررسی مشتق پذیری تابع از تعریف مشتق استفاده می کنیم و داریم:

$$\text{اگر } a \in \mathbb{Z} \rightarrow F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$F'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sin \pi(x - [x]) - 0}{x - a} = \frac{\sin \pi(x - [a^+])}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \pi(x - a)}{x - a} \xrightarrow{\substack{\sin u \sim u \\ u \rightarrow 0}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\pi(x - a)}{x - a} = \pi \Rightarrow f'_+(a) = \pi$$

اکنون $f'_-(a)$ را به دست می آوریم.

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{a}} \frac{\sin \pi(x - [x])}{x - a}$$

اگر $\bar{a} \rightarrow x$ داریم: $[x] = a - 1$ و داریم:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{a}} \frac{\sin(\pi(x - a + 1))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow \bar{a}} \frac{\sin(\pi(x - a) + \pi)}{x - a} \xrightarrow{\sin(\pi + a) = -\sin a} \lim_{x \rightarrow \bar{a}} \frac{-\sin \pi(x - a)}{x - a} = \frac{-\pi(x - a)}{x - a} = -\pi$$

با توجه به اینکه $f'_+(a) \neq f'_-(a)$ پس $f(x)$ در کل $\mathbb{R}$ مشتق پذیر نمی باشد.

۵- گزینه «۲» حالت مبهم $\infty \times \infty$ را پیش رو داریم که برای رفع ابهام از این حالت عکس عامل بی نهایت کننده را در مخرج کسر قرار می دهیم و سپس با استفاده از بسط مک لورن تابع e^x داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x + 2x^2 - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + bx - 2x - 2bx^2 + 2x^2 + 2bx^2 - 1 - ax}{x^2(1+bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(b-2-a) + x^2(-2b+2) + 2bx^2}{x^2(1+bx)} = 0 \end{aligned}$$

برای آنکه حد به دست آمده صفر شود، باید توان صورت از مخرج کسر بیشتر شود و این یعنی ضرایب x و x^2 در صورت کسر مساوی صفر شوند و داریم:

$$-2b + 2 = 0 \rightarrow b = 1, \quad b - 2 - a = 0 \xrightarrow{b=1} 1 - 2 - a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x} = 0$$

با توجه به اعداد به دست آمده داریم:

پس مقدار $a + b$ برابر صفر می باشد.

۶- گزینه «۴» با استفاده از نکته $\int (f(x) + f'(x))e^x dx = f(x)e^x$ که در کتاب ریاضی (۱) بیان کرده ایم، با در نظر گرفتن $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و با توجه به

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x dx = \left(\frac{1}{x+1} e^x \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

این که $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ می باشد داریم:

۷- گزینه «۳» این مثال، سؤال کنکور رشته صنایع - سیستم سال ۱۳۸۸ بوده است.

$$\text{طول قوس} = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

برای تابع $y = f(x)$ طول قوس منحنی در بازه $[a, b]$ برابر است با:

پس داریم:

$$\begin{aligned} \text{طول قوس} &= \int_{-b}^b \sqrt{1 + \left(a \frac{1}{a} \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2} dx = \int_{-b}^b \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = \int_{-b}^b \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left[a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-b}^b \\ &= a \left(\sinh\left(\frac{b}{a}\right) - \sinh\left(\frac{-b}{a}\right)\right) = a \left(\sinh\left(\frac{b}{a}\right) + \sinh\left(\frac{b}{a}\right)\right) = a \left(2 \sinh\left(\frac{b}{a}\right)\right) = 2a \sinh\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$



۸- گزینه «۴» حد داده شده به ازای $t \rightarrow 0$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد که با استفاده از قاعده هوییتال و با استفاده از مشتق زنجیره‌ای توابع، مشتق‌های

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,1)}{f(0,1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{4f_x(0,1) + e^t f_y(0,1)}{(2 \cos 2t) f_x(0,1) - (2 \sin 2t) f_y(0,1)} = \frac{4(1) + 2}{2(1)(1) - 2(0)(2)} = \frac{6}{2} = 3$$

صورت و مخرج را به دست می‌آوریم و داریم:

۹- گزینه «۱» مشابه این سؤال در متن کتاب حل شده است. با توجه به تابع زیر انتگرال که می‌توانیم آن را به صورت $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ بنویسیم و

همچنین با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری باید از تغییر متغیرهای $u = \frac{y}{x}$ و $v = \frac{x}{y}$ استفاده کنیم و داریم:

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \rightarrow 1 \leq u \leq 2 \\ v = \frac{x}{y} \rightarrow 1 \leq v \leq 2 \end{cases} \Rightarrow J_{xy} = \begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{4}{x^2 y^2} - \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{3}{x^2 y^2}$$

$$I = \frac{1}{3} \iint (xy)(x^2 y^2) e^{\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)} du dv = \frac{1}{3} \iint x^2 y^2 e^{\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)} du dv$$

پس $J_{uv} = \frac{x^2 y^2}{3}$ می‌باشد و داریم:

اکنون باید $x^2 y^2$ را نیز بر حسب u و v به دست آوریم و داریم:

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{u^2} \times \frac{1}{v^2} = \frac{x^6}{y^2} \times \frac{y^6}{x^2} = x^2 y^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{u^2} \times \frac{1}{v^2} e^{\frac{1}{u}} \times e^{\frac{1}{v}} du dv = \frac{1}{3} \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2} e^{\frac{1}{u}} du \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{v^2} e^{\frac{1}{v}} dv \right)$$

اکنون یکی از انتگرال‌ها را به دست می‌آوریم و با توجه به مشابه بودن انتگرال‌ها و برابر بودن بازه‌ها، انتگرال دوم نیز همان مقدار را دارد.

$$\int \frac{1}{u^2} \times \frac{1}{u} e^{\frac{1}{u}} du \xrightarrow{\frac{1}{u} = t, -\frac{1}{u^2} du = dt} - \int t e^t dt$$

با استفاده از جزء‌به‌جزء روش جدولی داریم:

$$\begin{array}{c|c} t & e^t \\ \hline 1 & e^t \\ 0 & e^t \end{array} \Rightarrow -(te^t - e^t) = -\left(\frac{1}{u} e^{\frac{1}{u}} - e^{\frac{1}{u}}\right) = -\left(\frac{1}{2} \sqrt{e} - \sqrt{e} - 0\right) = \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) \Rightarrow I = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^2 = \frac{e}{12}$$

۱۰- گزینه «۳» نمونه‌های زیادی شبیه این سؤال در کتاب ریاضی (۲) حل شده است. با توجه به اینکه منحنی C که فصل مشترک استوانه و صفحه

می‌باشد، یک ناحیه بسته است. از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$g: z - y - 1 = 0 \rightarrow \vec{\nabla} g = (0, -1, 1)$$

اگر صفحه تصویر را بر روی صفحه xoy بگیریم، داریم، $\vec{P} = \vec{k}$ و (باتوجه به این که جهت حرکت راستگرد و یعنی در جهت مثلثاتی است بردار قائم

$$\vec{n} ds = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|} dA = \frac{(0, -1, 1)}{1} dA$$

رو به خارج باید مثبت باشد) داریم:

اکنون باید $\text{curl } \vec{F}$ را به دست آوریم:

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4z & -2x & 2x \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(2 - 4) + \vec{k}(-2) = (0, 2, -2)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_S (0, 2, -2) \cdot (0, -1, 1) dA = \iint_S (-4) dA = -4(\text{مساحت دایره}) = -4(\pi(1)^2) = -4\pi$$

پس داریم:



سؤالات آزمون سراسری ۹۷

سؤالات رشته MBA

۱- فرض کنید $z = \frac{(1+2i)(1+3i)(1+4i)}{(2-3i)(2-4i)}$ باشد، در این صورت مقدار $z\bar{z}$ کدام است؟

(۴) $\frac{95}{26}$

(۳) $\frac{85}{26}$

(۲) $\frac{96}{25}$

(۱) $\frac{86}{25}$

۲- اگر z و w دو عدد مختلط باشند که $\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$ ، کدام مورد همواره صحیح است؟

(۴) $|w| > 1$ یا $|z| > 1$

(۳) $|w| < 1$ یا $|z| < 1$

(۲) $|w| = 1$ یا $|z| = 1$

(۱) $|w| = |z|$

۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^6}$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۱) $-\frac{1}{6}$

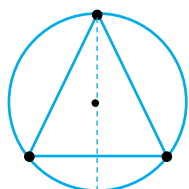
۴- در کره‌ای به شعاع ۶cm مخروطی را محاط می‌کنیم، ماکزیمم حجم این مخروط چقدر است؟

(۲) $\frac{(256)\pi}{3}$

(۱) $\frac{(258)\pi}{3}$

(۴) $\frac{(127)\pi}{3}$

(۳) $\frac{(128)\pi}{3}$



۵- اگر ناحیه بین $y = \cos x$ و $y = \sin x$ برای $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ را حول محور y ها دوران دهیم، حجم ناحیه حاصل از دوران کدام است؟

(۴) $\pi(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 1)$

(۳) $\pi(\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 1)$

(۲) $\pi(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 2)$

(۱) $\pi(\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2)$

۶- مرکز جرم یک صفحه مستطیلی را که ناحیه $0 \leq y \leq 3$ و $0 \leq x \leq 2$ را فرا می‌گیرد، در صورتی که چگالی سطح جنس صفحه در مکان (x, y) برابر $3y$ باشد، کدام است؟

(۴) $(1, \frac{5}{4})$

(۳) $(1, 2)$

(۲) $(1, \frac{3}{4})$

(۱) $(1, \frac{1}{4})$

۷- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت در مورد معادله $2 = \int_0^x f(t) dt - 3x$ چه می‌توان گفت؟

(۲) دقیقاً دو ریشه در بازه $[0, 1]$ دارد.

(۱) دقیقاً یک ریشه در بازه $[0, 1]$ دارد.

(۴) هیچ ریشه‌ای در بازه $[0, 1]$ ندارد.

(۳) دقیقاً سه ریشه در بازه $[0, 1]$ دارد.

۸- بازه همگرایی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x-6)^n}{(n+1)^9}$ کدام است؟

(۴) $[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}]$

(۳) $(\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$

(۲) $[\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$

(۱) $(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}]$

۹- مقدار $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n 2^{n+1}}{3^{n+1}}$ ، برابر کدام عدد است؟

(۴) ۹

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۳

۱۰- اگر $f(x) = \frac{1}{3x+5}$ باشد، مقدار $f^{(100)}(-1)$ کدام است؟

(۴) $\frac{3^{100}}{3^{101}} (100)!$

(۳) $\frac{3^{100}}{5^{101}} (100)!$

(۲) $\frac{3^{100}}{3^{100}} (100)!$

(۱) $\frac{3^{100}}{5^{100}} (100)!$

۱۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(\frac{1}{n}) + \sinh(\frac{2}{n}) + \dots + \sinh(\frac{n}{n})}{\cosh(\frac{1}{n}) + \cosh(\frac{2}{n}) + \dots + \cosh(\frac{n}{n})}$ ، برابر کدام گزینه است؟

(۴) $\frac{e-1}{e+1}$

(۳) $\frac{e+1}{e-1}$

(۲) $\frac{e}{e+1}$

(۱) $\frac{e}{e-1}$

۱۲- مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\sqrt{2}\pi$ (۲) $\sqrt{2}\pi$ (۳) $2\sqrt{\pi}$ (۴) 2π

۱۳- اگر $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ دنباله‌ای نامنفی و $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر ممکن است همگرا نباشد؟

- (۱) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ (۲) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \sqrt{a_n}$ (۳) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sqrt{a_n}$ (۴) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$

۱۴- انتگرال‌های ناسره $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 2x^2 + 3}{x^6 + 2x^4 + 6} dx$ و $J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2 + 1}{e^x + \sin x^2 + 1} dx$ ، به ترتیب، چگونه هستند؟

- (۱) واگرا - همگرا (۲) همگرا - همگرا (۳) همگرا - واگرا (۴) واگرا - واگرا

۱۵- اگر $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{1396}}{3^n}$ و $J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10n^2 - n + 1}{n^2 + n^2 + 3}$ ، در این صورت I و J، به ترتیب چگونه هستند؟

- (۱) همگرا - واگرا (۲) واگرا - واگرا (۳) واگرا - همگرا (۴) همگرا - همگرا

۱۶- معادله صفحه مماس بر رویه $e^z + 3xy^2 + 2zx = 4$ در نقطه $(1, -1, 0)$ کدام است؟

- (۱) $3x + 6y + 2z = -3$ (۲) $2x - y + 2z = 3$ (۳) $x - 2y + z = 3$ (۴) $3x - 6y + 2z = 9$

۱۷- مشتق جهتی تابع $f(x, y, z) = x^2 + 2xy^2 + z^2x$ در نقطه $(1, 1, 1)$ و در راستای $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

۱۸- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{\lg^{-1}y}^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} + 1$ (۲) $\sqrt{2} - 1$ (۳) $2 + \sqrt{2}$ (۴) $2 - \sqrt{2}$

۱۹- اگر D مثلث با رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ و $(0, 2)$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_D e^{y+x} dx dy$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}(e - \frac{1}{e})$ (۲) $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$ (۳) $e - \frac{1}{e}$ (۴) $2(e - \frac{1}{e})$

۲۰- حجم محصور بین دو رویه $z = 3(x^2 + y^2)$ و $z = 4 - x^2 - y^2$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{7}{2}\pi$ (۳) 2π (۴) $2(\pi - 1)$

۲۱- مقدار $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^2 e^{y^2} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}(e - 1)$ (۲) $\frac{1}{3}(e - 1)$ (۳) $\frac{1}{6}(e - 1)$ (۴) $\frac{1}{12}(e - 1)$

۲۲- اگر C دایره‌ای با مرکز $(2, 2)$ و شعاع ۱ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است در این صورت مقدار $\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ کدام است؟

- (۱) -2π (۲) 0 (۳) π (۴) 2π

۲۳- مجموع انتگرال‌های زیر با کدام گزینه برابر است؟

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$$

- (۱) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\sqrt{2}} r^2 \sin 2\theta dr d\theta$ (۲) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{2}} \sin 2\theta dr d\theta$ (۳) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^2 \sin 2\theta dr d\theta$ (۴) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^2 \sin 2\theta dr d\theta$

۲۴- فرض کنید D ناحیه محصور زیر صفحه $z = 4$ و بالای رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد. اگر در مختصات کروی

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi d\phi}{\cos^4 \phi}$$

- (۱) $2^7 \pi$ (۲) $2^6 \pi$ (۳) $\frac{2^7 \pi}{3}$ (۴) $3 \times 2^6 \pi$



۲۵- فرض کنید R ناحیه محصور بین $z = 0$ ، $z = x^2 + y^2$ ، $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ باشد، مقدار $\iiint_R (x^2 + y^2) dx dy dz$ کدام است؟

$$\frac{64\pi}{3} \quad (۴)$$

$$21\pi \quad (۳)$$

$$\frac{62\pi}{3} \quad (۲)$$

$$20\pi \quad (۱)$$

۲۶- فرض کنید $F(x, y, z) = (2xy^2 + 3x^2, 2yx^2, 1)$ و C منحنی $r(t) = (t^3, \sin^5(\frac{\pi t}{3}), t)$ که $0 \leq t \leq 1$ باشد، مقدار انتگرال تابع F بر منحنی C

یعنی $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ کدام است؟

$$3 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$

۲۷- فرض کنید C منحنی $r(t) = (t^3 + \sin(\pi t), t^3 + \sin(\pi t^2), t + \sin(\pi t^3))$ است که $0 \leq t \leq 1$ ، مقدار $\int_C 3x^2 dx + 2yz dy + y^2 dz$ کدام است؟

$$3 \quad (۴)$$

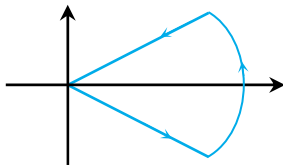
$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$

۲۸- اگر منحنی بسته C مرز قطاعی از دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد که توسط $y = x$ و $x + y = 0$ در ربع اول و چهارم مانند شکل جدا شده و دارای

جهت مثلثاتی است. در این صورت $\oint_C (x^2 \sin(x^2) - y^2) dx + (y^2 \cos^2 y - y) dy$ کدام است؟



$$\frac{3}{4}(\pi - 2) \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4^2}(\pi - 2) \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4}(\pi - 1) \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4^2}(\pi - 1) \quad (۳)$$

۲۹- فرض کنید D ناحیه محصور بین رویه‌های $z = 0$ ، $x^2 + y^2 = 4$ و $z = x^2 + y^2$ باشد و S مرز این ناحیه است. اگر $\vec{n}$ بردار یکه برونسو بر N

باشد و $F(x, y, z) = (kxz, kxy + z, k(y - z))$ و بدانیم $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \pi$ ، در این صورت k کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

۳۰- فرض کنید S بخشی از رویه $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ باشد که بالای رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قرار دارد و C مرز این ناحیه باشد که با جهت مثلثاتی در

نظر گرفته شده است، هرگاه از بالا به منحنی C نگاه کنیم، مقدار $\oint_C z dx + x dy + y dz$ کدام است؟

$$4\pi \quad (۴)$$

$$2\pi \quad (۳)$$

$$\pi \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$

۱- گزینه «۳» به یاد داشته باشید که عبارت $z\bar{z}$ همواره برابر $|z|^2$ است. در نتیجه کافی است توان دوم اندازه هر یک از اعداد مختلط در صورت و مخرج را قرار دهیم و داریم:

$$z\bar{z} = \frac{(1+4i)(1+9i)(1+16i)}{(4+9i)(4+16i)} = \frac{5 \times 10 \times 17}{13 \times 20} = \frac{85}{26}$$

۲- گزینه «۲» روش تشریحی: با استفاده از تساوی‌های $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ و $|z| = |\bar{z}|$ داریم:

اکنون دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

با استفاده از رابطه $|z|^2 = z\bar{z}$ داریم:

$$(z-w)(\overline{z-w}) = (1-\bar{z}w)(1-\bar{z}w) \Rightarrow (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w}) \Rightarrow z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} = 1 - z\bar{w} - \bar{z}w + z\bar{z}w\bar{w}$$

$$\Rightarrow |z|^2 + |w|^2 = 1 + |z|^2 |w|^2 \Rightarrow |z|^2 + |w|^2 - |z|^2 |w|^2 - 1 = 0 \Rightarrow |z|^2 (1 - |w|^2) - (1 - |w|^2) = 0 \Rightarrow (1 - |w|^2)(|z|^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |w| = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

روش تستی: با قرار دادن $w = 0$ به تساوی $|z| = 1$ می‌رسیم که در این صورت گزینه‌های (۱) و (۴) حذف می‌شوند. همچنین با قرار دادن $z = 2$ و $w = 1$ نیز گزینه (۳) حذف می‌شود.

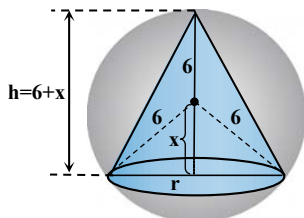
۳- گزینه «۳» واضح است که حد داده شده به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. در نتیجه با استفاده از قاعده‌ی هسپیتال و مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x) \sin(x^2)^2 - (2x^2) \sin(x^2)^2}{6x^5}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)(x^4) - (2x^2)(x^4)}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 - 2x^6}{6x^5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

با توجه به توان x در مخرج، کافی است فقط از هم ارزی ساده $\sin u \sim u$ استفاده کنیم.

۴- گزینه «۲» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:



روش اول: ابتدا فرمول حجم مخروط را می‌نویسیم: $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$. حالا باید رابطه‌ای بین r و h پیدا کنیم تا به کمک آن V را یک متغیره کنیم. با توجه به شکل روابط زیر قابل استخراج است:

$$h = 6 + x$$

$$r^2 + x^2 = 36 \Rightarrow r^2 = 36 - x^2$$

در نتیجه داریم:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (36 - x^2)(6 + x) \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} [-2x(6 + x) + (36 - x^2)] = 0$$

$$\Rightarrow -2x(6 + x) + (6 + x)(6 - x) = (6 + x)[-2x + 6 - x] = 0 \xrightarrow{x > 0} 6 - 3x = 0$$

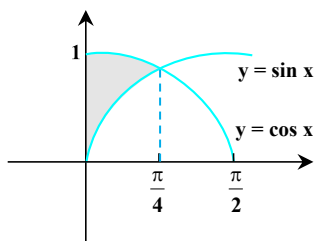
$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (36 - 4)(6 + 2) = \frac{256\pi}{3}$$

روش دوم: اگر در کره‌ای به شعاع r مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنیم حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{32}{81} \pi r^3$$

$$V = \frac{32}{81} \times \pi (6)^3 = \frac{32}{81} \times \pi \times 36 \times 6 = \frac{32}{27} \times \pi \times 12 \times 6 = \frac{32 \times 8\pi}{3} = \frac{256}{3} \pi$$

۵- گزینه «۱»



برای درک بهتر شکل ناحیه مورد نظر را رسم می‌کنیم:

با توجه به اینکه حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ (در محدوده‌ی $a \leq x \leq b$ از رابطه‌ی زیر (رابطه پوستر استوانه‌ای) محاسبه می‌شود داریم:

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} x(\cos x - \sin x) dx$$



با کمک جدول جزء به جزء داریم:

$$\begin{array}{r|l} x & \cos x - \sin x \\ + & \\ 1 & -\sin x + \cos x \\ - & \\ 0 & -\cos x + \sin x \end{array} \Rightarrow V = 2\pi(x(\sin x + \cos x) - (-\cos x + \sin x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}) - (0) - (0 - (-1))\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 1\right) = \pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

توجه داشته باشید که برای محاسبه‌ی این حجم در صورتی که از روش قرصی استفاده کنید، باید بازه‌ی y را به دو قسمت $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq 1$ تقسیم کنید و شعاع دوران در این دو حالت به ترتیب $x = \sin^{-1} y$ و $x = \cos^{-1} y$ خواهد بود که محاسبه‌ی انتگرال توان آن‌ها به مراتب از حل فوق دشوارتر است.

۶- گزینه «۳» با توجه به روابط مرکز جرم داریم:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dA}{\iint_D \rho(x,y)} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dA}{\iint_D \rho(x,y)}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^2 \int_0^2 xy^2 dy dx}{\int_0^2 \int_0^2 y dy dx} = \frac{(y^3/3)_0^2}{(y^2/2)_0^2} = \frac{2 \times 2^3}{2 \times 2} = 2$$

اما چون در همه گزینه‌ها $\bar{x} = 1$ است، نیازی به محاسبه آن نیست و برای $\bar{y}$ داریم:

۷- گزینه «۱» ابتدا معادله داده شده را به فرم $g(x) = 3x - \int_0^x f(t)dt - 2$ می‌نویسیم. حال با توجه به قضیه مقدار میانی داریم:

$$\begin{cases} g(0) = 0 - \int_0^0 f(t)dt - 2 = -2 < 0 \\ g(1) = 3 - \int_0^1 f(t)dt - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow g(0)g(1) < 0 \Rightarrow \text{حداقل یک ریشه در بازه } [0,1] \text{ داریم}$$

از طرفی $g'(x) = 3 - 2xf(x)$ و چون هم x و هم $f(x)$ همواره بین صفر تا ۱ قرار دارند (طبق فرض اولیه مسئله) پس $g'(x) \geq 0$ و این یعنی بنابر قضیه رول و نتایج آن، تابع فقط یک ریشه در بازه $[0,1]$ دارد.

۸- گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها، نیازی به محاسبه شعاع و بازه همگرایی نیست و فقط کافی است وضعیت سری را در دو سر بازه بررسی کنیم:

$$x = \frac{5}{3} \Rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-6)^n}{(n+1)^9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^9}$$

با توجه به اینکه در این سری متناوب $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^9} = 0$ و نزولی است، سری در این نقطه همگرا است.

$$x = \frac{7}{3} \Rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7-6)^n}{(n+1)^9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^9}$$

که این یک p -سری با مقدار $p = 9 > 1$ است، پس همگرا است.

روش تستی: با کنار گذاشتن عبارت $(3x-5)^n$ ، درجه‌ی n در مخرج ۹ و درجه‌ی n در صورت کسر صفر است، یعنی اختلاف درجه‌ی مخرج و صورت $9 > 1$ پس بازه‌ی همگرایی از دو سر باید بسته باشد، یعنی گزینه (۴) صحیح است!! در کمتر از ۳ ثانیه می‌شود به این تست با توجه به نکته تستی پاسخ داد!

۹- گزینه «۲» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: ابتدا سری را به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ می‌نویسیم. چون ضریب n پشت عبارت توان‌دار داریم، با توجه به سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ باید از دو

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \xrightarrow{\times x^2} \frac{x^2}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+1}$$

طرف مشتق بگیریم تا توان n به پشت x منتقل شود:

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{9} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 4$$

روش دوم: یک روش ابتکاری نیز به شکل زیر قابل بیان است:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\begin{cases} A = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \\ \frac{1}{3}A = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}A = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \Rightarrow \frac{1}{3}A = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{3}A = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{3}A = \frac{1}{6} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه «۴» با توجه به رابطه مشتق مرتبه n تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ که برابر $y^{(n)} = n!(-c)^{n-1} \frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}$ است داریم:

$$f^{(100)}(x) = (100)!(-3)^{99} \frac{-3}{(3x+5)^{101}} \xrightarrow{x=-1} f^{(100)}(-1) = (100)! \frac{(-3)^{100}}{(-3+5)^{101}} = \frac{3^{100}}{2^{101}} (100)!$$

اما اگر این رابطه را به خاطر نداشته باشید، با چندبار مشتق گرفتن، می‌توانید به روند و فرمول کلی آن دست یابید. به این صورت که:

$$y = \frac{1}{3x+5} = (3x+5)^{-1}$$

$$y' = (-1)(3)(3x+5)^{-2}$$

$$y'' = (-1)(-2)3^2(3x+5)^{-3} = 2!3^2(3x+5)^{-3}$$

$$y''' = (-1)(-2)(-3)3^3(3x+5)^{-4} = -3!3^3(3x+5)^{-4}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، روند پاسخ به گونه‌ای است که به ازای مشتق‌های مرتبه فرد یک منفی و سپس عبارت $(n!)3^n(3x+5)^{-(n+1)}$ و در مشتق‌های مرتبه زوج همین عبارت را با علامت مثبت داریم. بنابراین برای مشتق مرتبه ۱۰۰ داریم:

$$y^{(100)} = (100!)3^{100}(3x+5)^{-101} \Rightarrow y(-1) = 100! \frac{3^{100}}{2^{101}}$$

۱۱- گزینه «۴» به نظر می‌رسد با یک حد ریمان سروکار داریم. اما راهی برای استخراج $\frac{1}{n}$ نداریم. پس کافی است $\frac{1}{n}$ را در صورت و مخرج ضرب کنیم و خواهیم داشت:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}(\sinh(\frac{1}{n}) + \sinh(\frac{2}{n}) + \dots + \sinh(\frac{n}{n}))}{\frac{1}{n}(\cosh(\frac{1}{n}) + \cosh(\frac{2}{n}) + \dots + \cosh(\frac{n}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sinh(\frac{k}{n})}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cosh(\frac{k}{n})} = \frac{\int_0^1 \sinh x dx}{\int_0^1 \cosh x dx} = \frac{\cosh x}{\sinh x} \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow L = \frac{\cosh 1 - 1}{\sinh 1 - 0} = \frac{e + e^{-1} - 1}{e - e^{-1}} = \frac{e^2 - 2e + 1}{e^2 - 1} = \frac{(e-1)^2}{(e-1)(e+1)} = \frac{e-1}{e+1}$$

۱۲- گزینه «۱» برای حل این انتگرال، از تغییرمتغیر $\frac{1}{\sqrt{x}} = t$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$I = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\infty} t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} e^{-t} dt$$

با جایگزینی در انتگرال داریم:

$$I = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

با مقایسه این انتگرال با تابع گاما نتیجه می‌گیریم که $I = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ و با توجه به این که $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ است، داریم:

۱۳- گزینه «۴» در این گونه سؤالات معمولاً مثال نقض ساده‌ترین راه است و بهترین سری برای بررسی، $-P$ سری‌ها به خصوص $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ است. البته چون

اندیس از صفر شروع شده، فرض می‌کنیم $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ باشد. در این صورت واضح است که $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ که برابر $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ است واگراست. پس گزینه‌ی (۴) ممکن است همگرا نباشد.



۱۴- گزینه «۲» هر دو انتگرال داده شده در ∞ ناسره هستند. با استفاده از هم‌ارزی و آزمون مقایسه داریم:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x^6 + 2x^4 + 6} dx \sim \int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^6} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}$$

پس انتگرال I همگراست.

$$J = \int_1^{\infty} \frac{\cos x^2 + 1}{e^x + \sin x^2 + 1} dx \sim \int_1^{\infty} \frac{\cos x^2 + 1}{e^x} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e}$$

پس انتگرال J نیز همگراست.

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1396}}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{1396}}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

۱۵- گزینه «۱» برای بررسی سری اول از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

پس سری I همگراست.

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10n^2 - n + 1}{n^3 + n^2 + 3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{n^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{n}$$

برای سری J ابتدا با کمک هم‌ارزی در بی‌نهایت داریم:

با توجه به اینکه این سری در بی‌نهایت هم‌ارز سری هارمونیک است، این سری واگرا خواهد بود.

۱۶- گزینه «۳» برای به‌دست آوردن بردار نرمال صفحه مماس بر یک منحنی، از بردار گرادیان کمک می‌گیریم و داریم:

$$f(x, y, z) = e^z + 3xy^2 + 2zx - 4 = 0$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (3y^2 + 2z, 6xy, e^z + 2x) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1, -1, 0) = (3, -6, 3)$$

در همین جا می‌توان فهمید که گزینه (۳) صحیح است، زیرا فقط بردار نرمال در این گزینه موازی بردار نرمال حاصل از گرادیان است. ولی برای اطمینان

$$C: 3(x-1) - 6(y+1) + 3(z-0) = 0 \Rightarrow 3x - 6y + 3z = 9 \Rightarrow x - 2y + z = 3$$

راه‌حل را ادامه می‌دهیم:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (3x^2 + 2y^2 + z^2, 4xy, 2xz) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1, 1, 1) = (6, 4, 2)$$

۱۷- گزینه «۳» ابتدا بردار گرادیان تابع در این نقطه را محاسبه می‌کنیم:

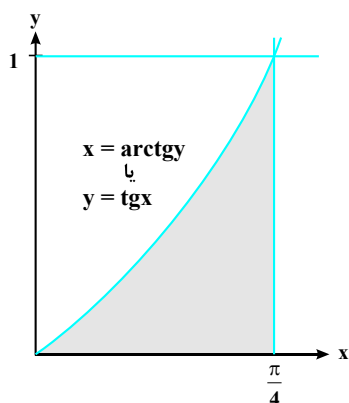
$$D_u f(p) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \cdot (6, 4, 2) = \frac{6+4+2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

حال با توجه به رابطه مشتق جهتی تابع در راستای بردار نرمال $\vec{u}$ داریم:

۱۸- گزینه «۲» حل این انتگرال به این صورت بسیار دشوار است؛ تابع زیر انتگرال یک متغیره و بر

حسب x است بنابراین با جابجا کردن متغیرها dy را به انتگرال میانی می‌آوریم. برای فهم بهتر

ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 \\ \operatorname{tg}^{-1} y \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq y \leq \operatorname{tg} x \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\operatorname{tg} x} \sec x \, dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \sec x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

۱۹- گزینه «۳» با توجه به تابع زیر انتگرال و ناحیه انتگرال‌گیری باید از تغییر متغیرهای $\begin{cases} u = -x + y \\ v = x + y \end{cases}$ کمک بگیریم. با توجه به اینکه ناحیه D به

محورهای مختصات و خط $x + y = 2$ محدود شده است، در مختصات جدید داریم:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow u = v$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow u = -v$$

$$x + y = 2 \Rightarrow v = 2$$

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow J_{uv} = \frac{1}{|J_{xy}|} = \frac{1}{2}$$

پس حدود انتگرال جدید به صورت $\begin{cases} 0 \leq v \leq 2 \\ -v \leq u \leq v \end{cases}$ خواهد بود. از طرفی با توجه به ژاکوبین داریم:

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_0^2 v (e^{\frac{u}{v}})_{-v}^v \, dv = \frac{1}{2} \int_0^2 v (e - e^{-1}) \, dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \times \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \times 4 = (e - e^{-1})$$

۲۰- گزینه «۱» ابتدا باید با برخورد دو رویه تصویر ناحیه بر صفحه xy را به دست آوریم:

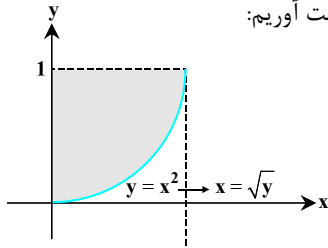
$$\begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) \\ z = 4 - (x^2 + y^2) \end{cases} \Rightarrow z = 4 - \frac{z}{3} \Rightarrow z = 3$$

$$z = 3(x^2 + y^2) = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

پس تصویر ناحیه، یک دایره به شعاع ۱ است. واضح است که استفاده از مختصات استوانه‌ای راحت‌تر است.

$$v = \iiint_D dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r - r^3 - 3r^3) dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (4r - 4r^3) dr = 2\pi \left(\frac{4}{2} - \frac{4}{4} \right) = 2\pi$$

۲۱- گزینه «۴» حل انتگرال با این ترتیب ممکن نیست. پس با کمک رسم ناحیه، سعی می‌کنیم حدود جدید را به دست آوریم:



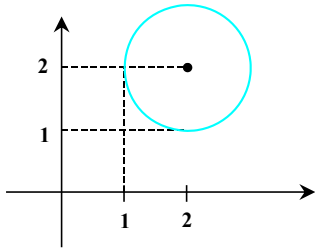
$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 e^{y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^2 e^{y^2} dx dy$$

$$= \int_0^1 e^{y^2} \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\sqrt{y}} \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} e^{y^2} dy = \frac{1}{12} \int_0^1 y^2 e^{y^2} dy = \frac{1}{12} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (e - 1)$$

۲۲- گزینه «۲» ابتدا منحنی C را در صفحه مختصات رسم می‌کنیم. اگر به خاطر داشته باشید برای تابع

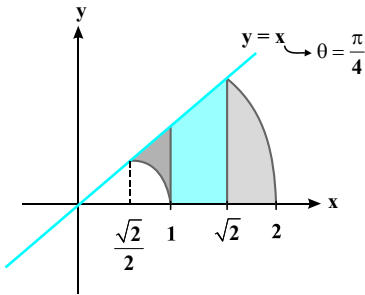
$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

برقرار است ولی در همه جا پایستار نیست. برای این میدان مقدار $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ روی هر منحنی بسته که مبدأ درون ناحیه‌ی محصور توسط آن خم قرار نداشته باشد برابر صفر است. با توجه به اینکه ناحیه داده شده در سؤال شامل مبدأ نمی‌شود پس طبق قضیه گرین حاصل انتگرال موردنظر صفر است.



۲۳- گزینه «۴» ابتدا هر ناحیه را به صورت جدا بررسی و رسم می‌کنیم: با یک نگاه به کران‌های استفاده

شده در این انتگرال‌ها متوجه می‌شویم که نواحی مورد نظر بین خط $y = x$ ، نیم دایره $y = \sqrt{1 - x^2}$ و نیم دایره $y = \sqrt{4 - x^2}$ قرار دارند. محل برخورد خط $y = x$ با این نیم دایره‌ها به ترتیب در $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x = \sqrt{2}$ است. اکنون به ۳ انتگرال دوگانه داده شده توجه می‌کنیم.

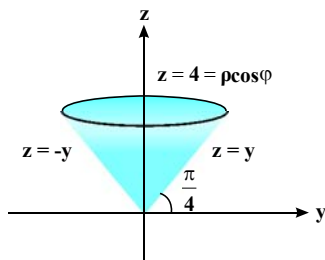


در اولین انتگرال دو گانه داریم $D_1: \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \\ \sqrt{1-x^2} < y < x \end{cases}$ و در انتگرال دوم $D_2: \begin{cases} 1 < x < \sqrt{2} \\ 0 < y < x \end{cases}$ و در سومین انتگرال نیز $D_3: \begin{cases} \sqrt{2} < x < 2 \\ 0 < y < \sqrt{4-x^2} \end{cases}$ است.

اکنون به اجتماع این سه ناحیه توجه کنید که به راحتی در مختصات قطبی قابل بیان است. روی خط $y = x$ داریم $\theta = \frac{\pi}{4}$. بنابراین در این ناحیه

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ است و واضح است که بین دو دایره به شعاع‌های یک و دو داریم $1 \leq r \leq 2$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 (r \cos \theta)(r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \frac{r^3}{4} \sin 2\theta dr d\theta$$



۲۴- گزینه «۱» ابتدا با رسم تصویر ناحیه در صفحه zy ، حدود شعاع و ϕ را به دست می آوریم:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{x=0} z = |y|$$

$$z = 4$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$$

پس تصویر ناحیه بر صفحه xy یک دایره به شعاع ۴ است.

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 \cos \phi \rho (\rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta = (2\pi) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \rho^4 \left| \frac{4}{\cos \phi} \sin \phi d\phi \right| = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4^5 \sin \phi}{\cos^4 \phi} d\phi = 2^7 \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi}{\cos^4 \phi} d\phi$$

۲۵- گزینه «۳» با توجه به دو رابطه $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ واضح است که تصویر ناحیه بر صفحه xy نیز فضای بین دو دایره به شعاع ۱ و ۲ است. از طرفی با توجه به حدود z از روابط $z = x^2 + y^2$ و $z = 0$ بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. با توجه به این نکات حدود انتگرال به صورت

$$V = \iiint_D dv = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta = (2\pi) \int_1^2 r^3 dr = \frac{2\pi}{4} r^4 \Big|_1^2 = 21\pi$$

۲۶- گزینه «۴» با توجه به پیچیدگی مسیر و تابع زیر انتگرال، شرط پایستاری آن را بررسی می کنیم:

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 + 3x^2 & 2yx^2 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 4xy - 4xy) = (0, 0, 0)$$

پس کافی است فقط تابع پتانسیل را به دست آوریم:

$$t = 0 \Rightarrow (0, 0, 0), \quad t = 1 \Rightarrow (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow I = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = (1 + 1 + 1 + c) - (0 + 0 + 0 + c) = 3$$

۲۷- گزینه «۳» در این سؤال با توجه به پیچیدگی مسیر و تابع زیر انتگرال، بهتر است شرط پایستاری آن را بررسی کنیم:

$$\vec{F} = (3x^2, 2yz, y^2)$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 & 2yz & y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2y, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

پس میدان برداری پایستار است و کافی است تابع پتانسیل آن را محاسبه کنیم:

$$f = \int (3x^2) dx + \int 2yz dy + \int (0) dz = x^3 + y^2 z + c$$

$$t = 0 \Rightarrow (0, 0, 0), \quad t = 1 \Rightarrow (1, 1, 1)$$

$$I = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = (1 + 1 + c) - (0 + 0 + c) = 2$$

۲۸- گزینه «۱» با توجه به بسته بودن منحنی C ، از قضیه‌ی گرین استفاده می کنیم:

$$I = \oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (0 + 3y^2) dA = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^1 r^4 dr = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(0 - 0 \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\pi - 2 \right)$$

۲۹- گزینه «۲» چون طراح گفته ناحیه بسته است، از قضیه دیورژانس کمک می گیریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_D (0 + kx - k) dv$$

با توجه به این که ناحیه نسبت به x متقارن است و kx تابعی فرد است، حاصل آن در ناحیه انتگرال گیری صفر است. پس داریم:

$$I = \iiint_D (-k) dv = -k \iiint_D dv = \pi \Rightarrow k = \frac{-\pi}{V}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} r dr d\theta = (\pi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} dr = \frac{\pi}{6} \left[r^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} (1 - 0) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow k = \frac{-\pi}{\frac{\pi}{6}} = -6$$

۳۰- گزینه «۴» با توجه به این که منحنی C بسته است، از قضیه استوکس کمک می گیریم:

$$\vec{n} d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|} dA = \frac{(4x, 4y, 2z)}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 4z^2}} dA$$

با فرض $g(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0$ داریم:

حال با تقاطع دو رویه مقدار z را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2(x^2 + y^2) + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 2(4z^2) + z^2 = 9z^2 = 9 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) + 1 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

پس منحنی موردنظر یک دایره به شعاع ۲ و در ارتفاع $z = 1$ است. از طرفی برای $\text{curl} \vec{F}$ داریم:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D (1, 1, 1) \cdot \frac{(4x, 4y, 2z)}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 4z^2}} dA = \iint_D (2x + 2y + 1) dA$$

از طرفی چون ناحیه D نسبت به x و y متقارن و $2x$ و $2y$ توابعی فرد هستند انتگرال آن ها در این ناحیه صفر است و داریم:

$$I = \iint_D dA = (\text{مساحت دایره ای به شعاع ۲}) = 4\pi$$



سؤالات رشته‌ی عمران

۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \frac{n}{\sin(\frac{1}{n})})$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) $+\infty$

۲- حاصل انتگرال $\int_{-5}^1 \ln(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2) dx$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) $+1$ (۴) واگراست.

۳- مقدار $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x + |x|) dx$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi^2}{2}$ (۲) $\frac{\pi^2}{2}$ (۳) π^2 (۴) صفر

۴- اگر $a + bi = \frac{(3+i)^2}{6-i}$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟ ($i = \sqrt{-1}$)

- (۱) $\frac{10}{35}$ (۲) $\frac{100}{35}$ (۳) $\frac{10}{37}$ (۴) $\frac{100}{37}$

۵- همگرایی و واگرایی سری‌های زیر کدام است؟

- (۱) هر دو همگرا (۲) هر دو واگرا (۳) A همگرا و B واگرا (۴) A واگرا و B همگرا
- $$A = 2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots \quad B = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

۶- مشتق سویی (جهتی) تابع $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$ در نقطه $A = (1, 2, 3)$ و در جهت $\overrightarrow{AB}$ کدام است؟ (مختصات B به صورت $B(5, 0, 4)$ است)

- (۱) $\frac{4}{3}\sqrt{21}$ (۲) $\frac{4}{3}\sqrt{21}$ (۳) $\frac{12}{\sqrt{7}}\sqrt{7}$ (۴) $4\sqrt{7}$

۷- مقدار انتگرال $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 y}$ که در آن D ناحیه محصور به خطوط $y = x$ ، $y = 2x$ ، $x + y = 2$ و $2x + y = 2$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $2 \ln 2$ (۳) $\ln 2$ (۴) $\frac{1}{2} \ln 2$

۸- فرض کنید خم C فصل مشترک دو رویه $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1$ و $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1$ در یک هشتم اول باشد، طول قوس خم C کدام است؟

- (۱) $\frac{(1+\sqrt{2})\pi}{2}$ (۲) $2\sqrt{2}\pi$ (۳) $\sqrt{2}\pi$ (۴) π

۹- اگر $\vec{F} = 3xy\vec{i} - y^2\vec{j}$ و c قسمتی از سهمی $y = 2x^2$ از $(0, 0)$ تا $(1, 2)$ باشد، حاصل $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{25}{6}$ (۲) $-\frac{7}{6}$ (۳) $\frac{25}{6}$ (۴) $\frac{7}{6}$

۱۰- اگر $\vec{F} = (2x + 3z)\vec{i} - (xz + y)\vec{j} + (y^2 + 2z)\vec{k}$ و S سطح جانبی کره‌ای به مرکز $(2, -1, 2)$ و شعاع ۳ باشد، حاصل $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ ، کدام است؟

- (۱) 36π (۲) 72π (۳) 108π (۴) 180π

۱- گزینه «۱» اگر از هم‌ارزی $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ (به دلیل این که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\frac{1}{n} \rightarrow 0$) استفاده کنیم؛ آن‌گاه به حالت ابهام $\infty - \infty$ خواهیم رسید؛ که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \frac{n}{\sin \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n} - n}{\sin \frac{1}{n}}$$

می‌دانیم باید در این حالت‌ها معمولاً بین دو کسر مخرج مشترک بگیریم:

حالا بسط مک‌لورن $\sin \frac{1}{n}$ را می‌نویسیم:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + \dots \right) - n}{\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \frac{1}{6n} + \dots) - n}{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{6n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6n^2}} \right) = -\frac{1}{6}$$

۲- گزینه «۲» با نگاهی گذرا به انتگرال می‌توان فهمید با یک انتگرال‌گیری معمولی سروکار نداریم. ترکیب رادیکال با $\ln$ و فرم عبارت جلوی $\ln$ تمام امیدها را از داوطلب می‌گیرد! اما وقتی انتگرال معین است همیشه به فکر استفاده از نکات آن باشید؛ ابتدا نکته‌ای که در کتاب به آن اشاره کرده‌ایم و از روی آن تست‌های زیادی حل کرده‌ایم را یادآوری می‌کنیم:

در این سؤال $a = -5$ و $b = 1$ ، $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2)$ می‌باشد، لذا انتگرال داده شده در صورت سؤال با انتگرال زیر برابر است:

$$I = \int_{-5}^1 [\ln(\sqrt{(-4-x)^2 + 4(-4-x) + 5} - (-4-x) - 4)] dx = \int_{-5}^1 [\ln(\sqrt{16+x^2+8x-16-4x+5} + 4+x-2)] dx$$

$$I = \int_{-5}^1 \ln(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x + 2) dx$$

حالا دو طرف تساوی فوق و تساوی صورت سؤال را با هم جمع می‌کنیم و سپس از خاصیت $\ln A + \ln B = \ln AB$ استفاده می‌کنیم:

$$2I = \int_{-5}^1 [\ln(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - (x+2)) + \ln(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + (x+2))] dx = \int_{-5}^1 \ln[x^2 + 4x + 5 - (x+2)^2] dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-5}^1 \ln[x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4)] dx \Rightarrow 2I = \int_{-5}^1 (\ln 1) dx \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

روش دیگر: برای حل این انتگرال، ابتدا آن را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$I = \int_{-5}^1 \ln(\sqrt{(x+2)^2 + 1} - (x+2))$$

حالا با کمک تغییر متغیر $x+2 = t$ داریم:

اگر به خاطر داشته باشید، توابع به فرم $y = \log(\sqrt{bx^2 + 1} + ax)$ که $b = a^2$ باشد، تابعی فرد هستند، پس انتگرال آن‌ها در یک بازه متقارن برابر صفر است. توجه: برای بررسی فرد بودن تابع زیر انتگرال، کافیه به صورت زیر عمل کنید:

$$f(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} - t) = \ln[(\sqrt{t^2 + 1} - t) \times \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1} + t}] = \ln\left(\frac{t^2 + 1 - t^2}{\sqrt{t^2 + 1} + t}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + t}\right) = -\ln(\sqrt{t^2 + 1} + t) = -f(-t)$$

۳- گزینه «۱» همیشه گفته‌ایم وقتی قدرمطلق می‌بینیم معمولاً سعی می‌کنیم ابتدا از شر آن خلاص شویم؛ بنابراین داریم:

$$I = \int_{-\pi}^0 x \cos(x-x) dx + \int_0^\pi x \cos(x+x) dx = \int_{-\pi}^0 x \cos(0) dx + \int_0^\pi x \cos 2x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \int_0^\pi x \cos 2x dx = -\frac{\pi^2}{2} + I_1$$

برای محاسبه‌ی I_1 دو روش داریم؛ یک روش استفاده از جدول و روش دیگر استفاده از نکته مقابل است:

در این سؤال $f(x) = x \cos 2x$ و $a = \pi$ است، لذا داریم:

$$I_1 = \int_0^\pi (\pi - x) \cos(\pi - x) dx = \pi \int_0^\pi \cos(2\pi - 2x) dx - \int_0^\pi x \cos(2\pi - 2x) dx \Rightarrow I_1 = \pi \int_0^\pi \cos 2x dx - \int_0^\pi x \cos 2x dx$$

حالا طرفین این تساوی را به طرفین تساوی $I_1 = \int_0^\pi x \cos 2x dx$ جمع می‌کنیم و داریم:

$$2I_1 = \pi \int_0^\pi \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi \Rightarrow I_1 = 0$$

بنابراین حال انتگرال همان $-\frac{\pi^2}{2}$ خواهد بود.



۴- گزینه «۴» با توجه به این که خواسته‌ی سؤال $a^2 + b^2$ می‌باشد و از طرفی در صورت سؤال در سمت چپ $a + bi$ داریم؛ باید سمت راست را به فرم $a + ib$ بنویسیم. برای این منظور صورت و مخرج کسر سمت راست را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{(3+i)^2}{6-i} = \frac{(9+i^2+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{(9-1+6i)(6+i)}{6^2-i^2} = \frac{48+8i+36i+6i^2}{37} = \frac{42+44i}{37} = \frac{42}{37} + \frac{44}{37}i \Rightarrow a = \frac{42}{37}, b = \frac{44}{37}$$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{42}{37}\right)^2 + \left(\frac{44}{37}\right)^2 = \frac{1764}{37^2} + \frac{1786}{37^2} = \frac{3700}{37^2} = \frac{37 \times 100}{37 \times 37} = \frac{100}{37}$$

بنابراین داریم:

روش ساده‌تر: با توجه به این که طراح سؤال $a^2 + b^2$ را خواسته است و نظر به این که برای عدد مختلط $a + ib$ اندازه به صورت $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ است. پس توان دوم اندازه مدنظر طراح بوده است. پس کافی است اندازه طرف دوم حساب شود. اندازه $3+i$ برابر با $\sqrt{10}$ و اندازه $6-i$ برابر با $\sqrt{37}$ است، بنابراین داریم:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{(\sqrt{10})^2}{\sqrt{37}} = \frac{10}{\sqrt{37}} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{100}{37}$$

۵- گزینه «۲» وقتی سری‌های باز شده داریم، بهتر است فرم جمله عمومی آن را سریع حدس بزنیم تا با قضایایی که بلدیم به راحتی آن‌ها را بررسی کنیم. در سری A ، در مخرج شروع اعداد از ۱ است و در هر جمله یک واحد اضافه می‌شود، سپس مخرج جمله عمومی، n قرار می‌دهیم. در صورت کسر هم اعداد از ۲ شروع شده و دوباره در هر جمله یک واحد اضافه می‌شود، بنابراین صورت کسر $(n+1)$ است. اما مثبت و منفی‌ها به راحتی با قرار دادن $(-1)^{n+1}$ ایجاد می‌شوند (چون جمله اول از $n=1$ شروع می‌شود، در توان $(n+1)$ قرار دادیم تا علامت جمله اول مثبت شود). با این اوصاف $a_n = \frac{(n+1)}{n}(-1)^{n+1}$ خواهد بود. واضح است که سری $A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)}{n}$ یک سری متناوب می‌باشد که طبق آزمون لایب‌نیتز این سری واگراست. چون شرط لازم همگرایی، یعنی صفر شدن حد جمله عمومی در بی‌نهایت را ندارد.

با همان توضیحات فوق جمله‌ی عمومی سری B به شکل $b_n = \frac{(n+1)(-1)^n}{2n+1}$ خواهد بود. که این سری هم به صورت $B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$ می‌باشد که

یک سری متناوب است و با توجه به صفر نشدن حد جمله عمومی واگراست.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

توجه داشته باشید که سری B را به صورت $B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1}$ نیز می‌توانیم بنویسیم که در این حالت نیز یک سری متناوب می‌باشد و حد جمله عمومی آن نیز برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود پس یک سری واگراست.

۶- گزینه «۱» ابتدا باید بردار $\overrightarrow{AB}$ را حساب کنیم:

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{21}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{k}$$

حالا باید بردار گرادیان f در نقطه‌ی A را به دست بیاوریم:

$$\vec{\nabla} f = (2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 4z\vec{k}) \Big|_{(1,2,3)} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

بنابراین گرادیان f در نقطه‌ی $(1,2,3)$ و در جهت $\overrightarrow{AB}$ به صورت مقابل می‌شود:

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \frac{2 \times 4}{\sqrt{21}} + \frac{(-4)(-2)}{\sqrt{21}} + \frac{12 \times 1}{\sqrt{21}} = \frac{28}{\sqrt{21}} = \frac{28\sqrt{21}}{21} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$$

۷- گزینه «۴» سوال جالبی است. با توجه به اینکه دو خط $x+y=2$ و $2x+y=2$ داریم، به نظر می‌رسد استفاده از روش ژاکوبین ممکن نباشد (چون شیب دو خط یکسان نیست). ولی توجه داشته باشید که لزومی ندارد همواره ناحیه‌ی مورد نظر حتماً به شکل لوزی یا بین دو منحنی یکسان با مقدار عرض از مبدا متفاوت باشد. در این سوال با اندکی زیرکی، با انتخاب $u = \frac{y}{x}$ و $v = \frac{2-y}{x}$ داریم:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases} \xrightarrow{u = \frac{y}{x}} 1 \leq u \leq 2$$

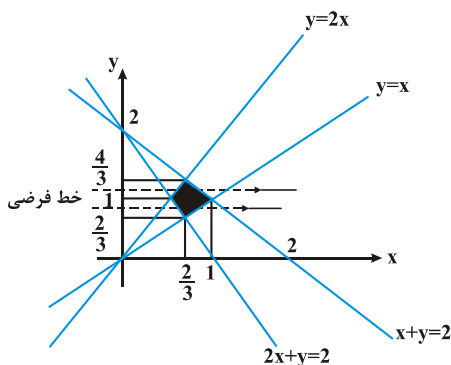
$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 2x=2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=\frac{2-y}{x} \\ 2=\frac{2-y}{x} \end{cases} \xrightarrow{v=\frac{2-y}{x}} 1 \leq v \leq 2$$

پس در ناحیه‌ی جدید $1 \leq u \leq 2$ و $1 \leq v \leq 2$ است. حالا برای محاسبه‌ی ژاکوبین داریم:

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{(2-y)}{x^2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{y+(2-y)}{x^2} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow J_{uv} = \frac{1}{|J_{xy}|} = \frac{x^2}{2}$$

حالا با جایگذاری در انتگرال اولیه داریم:

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 y} = \iint_{D'} \frac{\frac{x^2}{2} du dv}{x^2 y} = \frac{1}{2} \iint_{D'} \frac{du dv}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} \int_1^2 dv = \frac{1}{2} (\ln u|_1^2) (v|_1^2) = \frac{1}{2} \ln 2$$



روش عادی: فرض کنیم تفکیک روش اول به ذهن داوطلب نرسد؛ در این صورت باید از روش عادی بهره بگیریم. ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را مشخص می‌کنیم که برای به دست آوردن حدود x و y باید محل تلاقی خطوط را به دست آوریم.

$$\begin{cases} y=x \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} y=2x \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}$$

ناحیه انتگرال‌گیری مطابق شکل شامل دو مثلث می‌باشد که توسط خط $y=1$ از هم جدا شده‌اند و برای آن‌که محاسبه انتگرال ساده‌تر بشود خط فرضی را موازی محور x ها وارد ناحیه می‌کنیم و سپس حاصل انتگرال در این دو ناحیه را باید با هم جمع کنیم.

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 y} = \int_{\frac{2}{3}}^1 \int_{\frac{2-y}{2}}^y \frac{1}{x^2 y} dx dy + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2-y}{2}} \frac{1}{x^2 y} dx dy$$

انتگرال اول را I و انتگرال دوم را J می‌نامیم.

$$I = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{x} \right)_{\frac{2-y}{2}}^y dy = \int_{\frac{2}{3}}^1 -\frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{2-y} \right) dy$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2-y} \right) dy = \left(\frac{1}{y} + \ln y - \ln(2-y) \right) \Big|_{\frac{2}{3}}^1 = (1 + \ln 1 - \ln 1) - \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{4}{3} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$J = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{x} \right)_{\frac{y}{2}}^{\frac{2-y}{2}} dy = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} -\frac{1}{y} \left(\frac{1}{2-y} - \frac{2}{y} \right) dy$$

اکنون حاصل انتگرال J را به دست می‌آوریم:

$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2}{y^2} - \frac{1}{y(2-y)} \right) dy = \left(-\frac{2}{y} - \frac{1}{y} (\ln y - \ln(2-y)) \right) \Big|_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} = \left(-\frac{6}{4} - \frac{1}{4} (\ln \frac{4}{3} - \ln \frac{2}{3}) \right) - \left(-2 - \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 1) \right)$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{1}{4} (\ln 2) + 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln 2$$

$$I + J = \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{1}{4} \ln 2$$

پس حاصل $I + J$ برابر است با:



۸- گزینه «۳» ابتدا معادله‌ی خم C را تعیین می‌کنیم. می‌دانیم معادله دو رویه بیضی است، برای بیضی به معادله‌ی $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ معادله‌ی

پارامتری به شکل $\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases}$ است. برای این سؤال داریم:

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{4} = 1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی پارامتری}} \begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \cos t \\ y = \sqrt{\lambda} \sin t \end{cases}, \quad \frac{x^2}{\lambda} + \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \cos t \\ z = \sqrt{\lambda} \sin t \end{cases}$$

چون در یک هشتم اول هستیم $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ باید باشد. لذا طبق فرمول طول قوس داریم:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\sqrt{\lambda} \sin t)^2 + (\sqrt{\lambda} \cos t)^2 + (\sqrt{\lambda} \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\lambda \sin^2 t + \lambda \cos^2 t + \lambda \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\lambda (\sin^2 t + 2 \cos^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\lambda} dt = \sqrt{\lambda} \times \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \end{aligned}$$

۹- گزینه «۲» با توجه به این که تابع قسمتی از یک نمودار است، لذا بهتر است از پارامتری کردن کمک بگیریم، اگر فرض کنیم $x = t$ ، آن‌گاه $y = 2t^2$

خواهد بود. چون $0 \leq x \leq 1$ لذا $0 \leq t \leq 1$ می‌شود. معادله‌ی پارامتری منحنی به شکل مقابل است:

$\vec{C}(t) = 4\vec{i} + 2t^2\vec{j} \Rightarrow \vec{C}'(t) = 4t\vec{j}$
حالا در ضابطه‌ی $\vec{F}$ به جای تمام x ها، متغیر t و به جای تمام y ها، عبارت $2t^2$ را جایگزین می‌کنیم:
 $\vec{F}(\vec{C}(t)) = 3t \times 2t^2\vec{i} - (2t^2)^2\vec{j} = 6t^3\vec{i} - 4t^4\vec{j}$
حالا به راحتی سراغ انتگرال گیری می‌رویم:

$$I = \int_0^1 \vec{F}(\vec{C}(t)) \cdot \vec{C}'(t) dt = \int_0^1 (6t^3\vec{i} - 4t^4\vec{j}) \cdot (4t\vec{j}) dt = \int_0^1 (6t^3 - 16t^5) dt = \left[\frac{6}{4}t^4 - \frac{16}{6}t^6 \right]_0^1 = \frac{6}{4} - \frac{16}{6} = \frac{18}{12} - \frac{32}{12} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6}$$

۱۰- گزینه «۳» با توجه به این که سطح S سطح یک کره کامل و بسته به شعاع ۳ می‌باشد، با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V (2 - 1 + 2) dv = 3 \iiint_V dv = 3 \times (\text{حجم کره‌ای به شعاع ۳}) = 3 \times \left(\frac{4}{3} \pi (3)^3 \right) = 4\pi(27) = 108\pi$$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

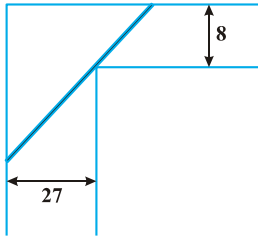
۱- اگر $z = (1-i)(1+i\sqrt{3})$ ، مقدار z با کدام گزینه برابر است؟

(۱) $2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$ (۲) $2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12}))$ (۳) $2\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12}))$ (۴) $2\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) - i\sin(\frac{7\pi}{12}))$

۲- سری $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{2}{n}) - 2(\sin(\frac{1}{n}))$ و سری $J = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ به ترتیب کدام است؟

(۱) همگرا - همگرا (۲) همگرا - واگرا (۳) واگرا - همگرا (۴) واگرا - واگرا

۳- طول بلندترین میله‌ای که بتواند به‌طور افقی از پیچ یک راهرو به عرض ۸ به یک راهرو به عرض ۲۷ عبور کند، کدام است؟



(۱) $11\sqrt{11}$ (۲) $12\sqrt{12}$ (۳) $13\sqrt{13}$ (۴) $14\sqrt{14}$

۴- فرض کنید $f(x) = \int_0^x \sinh(t^2) dt$ که $0 \leq x \leq \sqrt{\ln(1396)}$ است. منحنی را حول محور y ها دوران می‌دهیم. مساحت رویه دوار حاصل از دوران، کدام است؟

(۱) $2\pi(1396 - \frac{1}{1396})$ (۲) $\frac{\pi}{4}(1396 - \frac{1}{1396})$ (۳) $\pi(1396 - \frac{1}{1396})$ (۴) $\frac{\pi}{2}(1396 - \frac{1}{1396})$

۵- اگر $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 5}$ ، مقدار $f^{(99)}(-1)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4^{33}}(99)!$ (۲) $\frac{1}{4^{34}}(99)!$ (۳) $-\frac{1}{4^{34}}(99)!$ (۴) $-\frac{1}{4^{33}}(99)!$

۶- کدام یک از حدود زیر موجود نمی‌باشد؟

(۱) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x^2 \sin y}{\sin(x^2 + y^2)}$ (۲) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x^2 \sin y}{\sin(x^2 + y^2)}$ (۳) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(xy) \sin z}{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}$ (۴) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin y^2}{x^2 + y^2}$

۷- رویه $z = e^{-(x^2 + y^2)}$ چند صفحه مماس موازی صفحه xy دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸- حجم ناحیه محدود بالای رویه $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ که درون $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ قرار دارد، کدام است؟

(۱) $9\pi(2 - \sqrt{3})$ (۲) $9\pi(3 - \sqrt{3})$ (۳) $9\pi(1 + \sqrt{3})$ (۴) $9\pi(\sqrt{3} - 1)$

۹- فرض کنید D ناحیه محصور بین منحنی‌های $xy = 1$ ، $xy = 9$ ، $y = x$ و $y = 4x$ باشد. مقدار انتگرال مقابل کدام است؟ $\iint_D (\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}) dx dy$

(۱) $8 + \frac{49}{3} \ln 2$ (۲) $8 + \frac{50}{3} \ln 2$ (۳) $8 + \frac{51}{3} \ln 2$ (۴) $8 + \frac{52}{3} \ln 2$

۱۰- اگر s نیم‌کره بالایی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد، مقدار $\iint_s (e^{z^2}(x+y) + y^2 + z) d\sigma$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{5\pi}{3}$

۱- گزینه «۱» با یک سؤال نسبتاً ساده از فصل اعداد مختلط روبه‌رو هستیم! در کتاب گفته‌ایم وقتی ضرب و تقسیم دو عدد مختلط داریم بهتر است وارد فضای قطبی شویم؛ پس ابتدا هر کدام از دو عدد $1-i$ و $1+i\sqrt{3}$ را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$1-i = \sqrt{1+(-1)^2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{زاویه } -\frac{\pi}{4} \text{ به این دلیل است که نقطه در ربع چهارم است}$$

$$1+i\sqrt{3} = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{زاویه } \frac{\pi}{3} \text{ به این دلیل است که نقطه در ربع اول است}$$

$$z = (\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}})(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

حالا دو عدد را در مختصات قطبی در هم ضرب کنیم:

$$z = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2} [\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})] \quad \text{حالا کافی است } z \text{ را با توجه به فرم } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ تبدیل کنیم}$$

۲- گزینه «۲» در سری I هم‌ارزی sinها را می‌نویسیم:

$$\sin(\frac{2}{n}) - 2\sin(\frac{1}{n}) = (\frac{2}{n} - \frac{2^3}{3!n^3} + \dots) - 2(\frac{1}{n} - \frac{1^3}{3!n^3} + \dots) \approx \frac{k}{n^3} \quad (k \text{ عددی ثابت است})$$

این سری هم‌ارزی $\frac{1}{n^3}$ است و طبق مطالب p سری همگرا است. حالا سراغ سری J می‌رویم: بهتر است با توجه به وجود توان سراغ آزمون کوشی برویم:

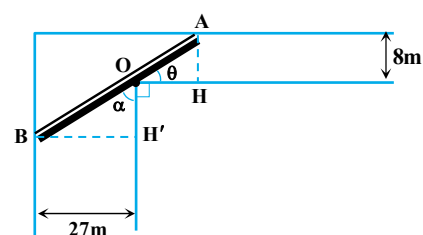
$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n}} = e^1 > 1$$

چون بزرگ‌تر از یک است. پس سری واگرا است.

شبیه سری I، مثال ۸ صفحه ۶۸۲ و شبیه سری J، مثال ۱۸ صفحه ۶۸۵ کتاب ریاضی عمومی (۱) چاپ ۲۲ مدرسان شریف می‌باشد.

۳- گزینه «۳» شکل این سؤال عیناً مثال ۱۹ صفحه‌ی ۳۱۰ کتاب ریاضی عمومی (۱) چاپ ۲۲ مدرسان شریف است.

روش اول: مطابق شکل زیر، دو سر تیر چوبی را با A و B و طول میله را با L نامگذاری می‌کنیم. برای آن‌که بتوانیم از اطلاعات داده شده استفاده کنیم باید رابطه‌ای بین L و عرض هر کدام از دالان‌ها پیدا کنیم. چون (در صورت سؤال عرض هر کدام از دالان‌ها مشخص شده است) برای رسیدن به این هدف، خطوط قائم AH و BH' را بر دیوارها رسم می‌کنیم. واضح است که $AH = 8\text{m}$ و $BH' = 27\text{m}$. حالا از نسبت‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم تا طول میله را به‌صورت تابعی یک ضابطه‌ای برحسب زاویه‌ی θ بنویسیم. یک توضیح مختصر هم در مورد زاویه‌ها لازم است؛ بدیهی است که $\theta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$ پس $\theta + \alpha = 90^\circ$ یعنی $\alpha = 90^\circ - \theta$ است. پس $\sin\alpha = \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$. حالا از این‌جا شروع می‌کنیم که $L = OA + OB$ است. هر کدام از اضلاع OA و OB و تیر یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، پس می‌توانیم اندازه‌ی آن‌ها را برحسب زاویه‌ی θ به‌دست آوریم. در این صورت داریم:



$$\sin\theta = \frac{AH}{OA} = \frac{8}{OA} \Rightarrow OA = \frac{8}{\sin\theta}$$

$$\sin\alpha = \frac{BH'}{OB} = \frac{27}{OB} \Rightarrow \cos\theta = \frac{27}{OB} \Rightarrow OB = \frac{27}{\cos\theta}$$

با جایگذاری نتایج به‌دست آمده در ضابطه‌ی L داریم:

$$L = \frac{8}{\sin\theta} + \frac{27}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{d\theta} = \frac{-8\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{27\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{27\sin^3\theta - 8\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0 \Rightarrow 27\sin^3\theta - 8\cos^3\theta = 0 \Rightarrow \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow \tan^3\theta = \frac{8}{27} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta \Rightarrow \frac{1}{1+(\frac{2}{3})^2} = \cos^2\theta \Rightarrow \frac{9}{13} = \cos^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$L = 4\sqrt{13} + 9\sqrt{13} = 13\sqrt{13}$$

اگر مقادیر فوق را در ضابطه‌ی L جایگزین کنیم، داریم:

$$\sin \theta = \frac{AH}{OA} = \frac{\lambda}{OA}$$

روش دوم: همانند روش قبل رابطه‌ای بین نسبت‌های زاویه‌ای مناسب پیدا می‌کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{27}{OB} \xrightarrow{\theta + \alpha = 90^\circ} \cos \theta = \frac{27}{OB}$$

از طرفی رابطه‌ی $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ همواره برقرار است. پس در واقع با فرض $OA = x$ و $OB = y$ ، می‌خواهیم عبارت $f(x, y) = x + y$ را با شرط

$$g(x, y) = \frac{\lambda^2}{x^2} + \frac{27^2}{y^2} = 1$$

ماکزیمم کنیم. با استفاده از روش ساده شده‌ی لاگرانژ داریم:

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{1}{-2 \times \lambda^2 \times x^{-3}} = \frac{1}{-2 \times 27^2 \times y^{-3}} \Rightarrow \frac{x^3}{y^3} = \frac{y^3}{x^3} \Rightarrow x = \frac{4y}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2}{x^2} + \frac{27^2}{y^2} = \frac{\lambda^2}{(\frac{4y}{9})^2} + \frac{27^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} \left(\frac{\lambda^2 \times 9^2}{4^2} + 27^2 \right) = 1 \Rightarrow y = \sqrt{4 \times 9^2 + 9 \times 9^2} = 9\sqrt{13} \Rightarrow x = 4\sqrt{13} \Rightarrow x + y = 13\sqrt{13}$$

۴- گزینه «۴» ابتدا فرمول را یادآوری می‌کنیم؛ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$ حول محور y در بازه $a \leq x \leq b$ از رابطه زیر حساب

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

می‌شود:

در این سؤال $f(x) = \int_0^x \sinh(t^2) dx$ است، لذا با استفاده از قاعده مشتق از انتگرال و در ادامه با استفاده از رابطه‌ی $(\circ)h^2 x = 1 + \sinh^2 x$ داریم:

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt{\ln(1396)}} x \sqrt{1 + \sinh^2(x^2)} dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{\ln(1396)}} x \cosh(x^2) dx = 2\pi \left[\frac{1}{2} \sinh(x^2) \right]_0^{\sqrt{\ln(1396)}} = \pi \sinh(\ln(1396))$$

حالا با استفاده از فرمول $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ و پس از آن رابطه‌ی $e^{\ln a} = a$ به جواب نهایی می‌رسیم:

$$S = \pi \left(\frac{e^{\ln 1396} - e^{-\ln 1396}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(1396 - \frac{1}{1396} \right)$$

۵- گزینه «۳» برای حل این سؤال، ابتدا سعی می‌کنیم تابع داده شده را به فرم ساده‌تری بنویسیم:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 5} = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4} = \frac{1}{(x+1)^3 + 4}$$

واضح است محاسبه‌ی مستقیم مشتق «۹۹ام» سخت است و لذا باید از بسط تیلور یا مک‌لورن کمک بگیریم، اما مشتق در نقطه‌ی $x = -1$ خواسته شده،

بنابراین با تغییر متغیر مناسب، مشتق در نقطه‌ی $t = 0$ حساب شود. با فرض $x + 1 = t$ داریم $g(t) = \frac{1}{t^3 + 4}$ که با کمی تغییر در ضابطه‌ی آن داریم:

$$g(t) = \frac{1}{4(1 - (-\frac{t^3}{4}))} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - (-\frac{t^3}{4})} \right)$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(-\frac{t^3}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} t^{3n} \quad \text{می‌توانیم ضابطه‌ی } g(t) \text{ را به صورت سری بنویسیم (} u = -\frac{t^3}{4} \text{) و داریم:}$$

با توجه به عامل t^{3n} ، به ازای $n = 33$ توان t برابر ۹۹ خواهد بود و اگر به خاطر داشته باشید، ضریب x^n در بسط مک‌لورن $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ است. پس

$$\frac{(-1)^{33}}{4^{33+1}} = \frac{g^{(99)}(0)}{99!} \Rightarrow g^{(99)}(0) = f^{(99)}(-1) = \frac{-1}{4^{34}} (99!) \quad \text{ضریب } t^{3n} \text{ برابر } \frac{f^{(3n)}(0)}{(3n)!} \text{ خواهد بود. بنابراین به ازای } n = 33 \text{ در } t = 0 \text{ داریم:}$$

۶- گزینه «۲» با توجه به این که در تمام گزینه‌ها x, y و z به سمت صفر میل می‌کنند، از هم‌ارزی در صفر برای سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\text{گزینه (۱): } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \text{گزینه (۲): } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$\text{گزینه (۳): } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad ; \quad \text{گزینه (۴): } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) = 1$$



در تمام سؤالاتی که مبدأ مختصات تنها ریشه‌ی مخرج کسر می‌باشد، اگر هریک از جملات صورت کسر، درجه‌ای بیشتر از تک‌تک جملات مخرج داشته باشد، حد تابع وجود دارد و برابر با صفر است و اگر درجه هر یک از جملات صورت کوچک‌تر یا مساوی تک‌تک جملات مخرج باشند، تابع حد ندارد. در این سؤال حد گزینه (۴) برابر با (۱) می‌شود. به غیر از این گزینه که حدش به وضوح برابر با یک است و حالت ابهام ندارد، گزینه‌های (۱) و (۳) حد دارند، چون درجه‌ی صورت کسر هر دو برابر با (۳) است و درجه هریک از جملات مخرج (۲) است. پس این ۲ گزینه حد دارند و حدشان برابر با صفر است. تا این‌جا بدون بررسی می‌توان گفت گزینه (۲) جواب تست است! اما اگر بخواهیم دقیق‌تر بررسی کنیم باید توجه کنیم که در شرایط فعلی درجه‌ی جمله‌ی $x^2 y$ کوچک‌تر از y^2 نیست، بنابراین نمی‌توان اظهارنظر کرد، ولی اگر از تغییر متغیر $x = X^2$ و $y = Y^2$ استفاده کنیم، داریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{yx^2}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{(X,Y) \rightarrow (0,0)} \frac{Y^2 X^2}{X^4 + Y^4}$$

حالا می‌توان گفت چون درجه صورت مساوی درجه‌ی هریک از جملات مخرج کسر است، حد وجود ندارد!

البته در بررسی گزینه (۲) یک روش دیگر هم این است که روی دو مسیر متفاوت حاصل حد را بررسی کنیم:

$$y = 0 \text{ مسیر} : \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx^2}{x^4 + y^2} = 0, \quad y = x^2 \text{ مسیر} : \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx^2}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

چون روی دو مسیر متفاوت به دو جواب متفاوت رسیده‌ایم، بنابراین حاصل حد وجود ندارد.

حد داده شده در این گزینه عیناً مثال (۱۴) صفحه ۱۳۱ کتاب ریاضی عمومی (۲) چاپ ۲۰ مدرسان شریف می‌باشد. گزینه‌های دیگر هم در صفحات ۱۳۱ و ۱۳۲ در قالب مثال آورده شده‌اند.

۷- گزینه «۲» در هر نقطه از سطح $z = f(x, y)$ بردار نرمال صفحه‌ی مماس، بردار گرادیان یعنی $\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$ است، از طرفی اگر صفحه افقی باشد، بردار نرمال آن به صورت $C\vec{k}$ است، بنابراین باید $f_x = f_y = 0$ باشد تا صفحه‌ی مماس افقی داشته باشیم:

$$\begin{cases} f_x = -2xe^{-(x^2+y^2)} \Rightarrow x = 0 \\ f_y = -2ye^{-(x^2+y^2)} \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 1$$

بنابراین فقط در نقطه‌ی $(0, 0, 1)$ صفحه‌ی مماس افقی داریم.

توجه: مثال سخت‌تر از این نوع سؤال و تقریباً با همین خواسته، مثال (۶) صفحه‌ی ۲۱۳ کتاب ریاضی عمومی (۲) چاپ ۲۰ مدرسان شریف است.

۸- گزینه «۱»

روش اول: با توجه به اینکه ناحیه‌ی مورد نظر بین یک مخروط و کره قرار دارد، بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم. فقط توجه باشید که چون $z > 0$ است، فقط نیمه‌ی مخروط بالایی را داریم و در نتیجه فقط ناحیه‌ی بالایی مورد نظر است. ابتدا با برخورد دو رویه تصویر ناحیه بر صفحه‌ی xy را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + (3x^2 + 3y^2) = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

پس واضح است که حدود θ به صورت $0 \leq \theta \leq 2\pi$ خواهد بود. کران‌های ρ با توجه به آنکه درون کره‌ای به شعاع ۳ قرار دارد، به صورت $0 \leq \rho \leq 3$ هستند. فقط تعیین حدود ϕ باقی می‌ماند. برای این کار معادلات داده شده را در صفحه‌ی YZ قطع می‌دهیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \xrightarrow{x=0} y^2 + z^2 = 9 \quad z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \xrightarrow{x=0} z = |y|\sqrt{3}$$

پس در صفحه‌ی YOZ ناحیه درون دایره و بالای نمودار $z = |y|\sqrt{3}$ به دست می‌آید. برای تعیین کران ϕ نیز با توجه به رابطه‌ی $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right)$ خواهیم داشت:

$$0 \leq \phi \leq \tan^{-1}\left(\frac{y}{y\sqrt{3}}\right) \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$$

پس حجم ناحیه‌ی مورد نظر برابر است با:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dv = \iiint_D \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = (2\pi) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^3 \left(-\cos \phi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{4} (27 - 0) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = 9\pi(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

روش دوم: می‌دانیم حجم شکلی که از پایین به رویه‌ی $z = g(x, y)$ و از بالا به رویه‌ی $z = f(x, y)$ محدود شده باشد و تصویر آن بر صفحه‌ی xOy ناحیه‌ی D باشد، با فرمول $V = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dA$ محاسبه می‌شود. در این سؤال، ابتدا با تقاطع دو رویه و حذف z ، تصویر ناحیه بر صفحه‌ی xOy را بدست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sqrt{3x^2 + 3y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 + (3x^2 + 3y^2) = 4(x^2 + y^2) = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

در این ناحیه، ارتفاع رویه‌ی $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ از نیم‌کره‌ی $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ کمتر است (کافیست یک نقطه مانند مبدأ که درون این ناحیه قرار دارد انتخاب کنید و مقدار Z متناظر با هر یک از رویه‌ها را برای آن محاسبه و با هم مقایسه کنید تا f و g مشخص شود) پس داریم:

$$V = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dA = \iint_D [\sqrt{9 - x^2 - y^2} - \sqrt{3(x^2 + y^2)}] dA$$

با توجه به وجود $x^2 + y^2$ در زیر انتگرال و اینکه ناحیه‌ی D یک دایره به شعاع $\frac{3}{2}$ است، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{9 - r^2} - \sqrt{3}r) r dr d\theta = (2\pi) \int_0^{\frac{3}{2}} (r\sqrt{9 - r^2} - r^2 \sqrt{3}) dr \\ &= (2\pi) \left[-\frac{1}{3}(9 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3} r^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} = (2\pi) \left[\left(-\frac{1}{3}(9 - \frac{9}{4})^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \right) - \left(-\frac{1}{3}(9 - 0)^{\frac{3}{2}} - 0 \right) \right] \\ &= (2\pi) \left[\left(-\frac{1}{3} \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{27}{8}\right) \right) - \left(-\frac{1}{3}(9)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = (2\pi) \left[\left(-\frac{1}{3} \left(\frac{81\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{27}{8}\right) \right) - \left(-\frac{1}{3}(27) \right) \right] \\ &= (2\pi) \left[\left(-\frac{27\sqrt{3} + 9}{8} \right) + 9 \right] = (2\pi) \left[9 - \left(\frac{9}{8}\sqrt{3}\right) \right] = 9\pi(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

۹- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از روش تغییر متغیر به صورت $v = \frac{y}{x}$ و $u = xy$ انتگرال موردنظر را محاسبه می‌کنیم. با توجه به محدوده داده شده در سؤال داریم $1 \leq u \leq 9$ و $1 \leq v \leq 4$. همچنین داریم:

$$J_{uv} = \frac{1}{J_{xy}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}} = \frac{1}{2v} \Rightarrow \iint_A (\sqrt{xy} + \sqrt{\frac{y}{x}}) dx dy = \int_1^4 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{9}{v}} \frac{1}{2v} (\sqrt{u} + \sqrt{v}) du dv$$

در انتگرال وسطی $\frac{1}{2v}$ ضریب ثابت است و می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد:

$$\int_1^9 (\sqrt{u} + \sqrt{v}) du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \sqrt{v} u \right]_1^9 = \frac{2}{3} (27 - 1) + 8\sqrt{v}$$

با قرار دادن جواب در انتگرال دوم داریم:

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{\frac{52}{3} + 8\sqrt{v}}{2v} dv = \left[\frac{52}{6} \text{Ln} v + 8\sqrt{v} \right]_1^4 = \left(\frac{52}{6} \text{Ln} 4 + 16 \right) - \left(\frac{52}{6} \text{Ln} 1 + 8 \right) = \frac{52}{6} \text{Ln} 2^2 + 8 = \frac{52}{3} \text{Ln} 2 + 8$$

شاید به اینجای کار برسید و بگویید که گزینه‌ی (۴) صحیح است. اما توجه داشته باشید که تغییر متغیر انجام شده یک به یک نیست و در واقع فضای بین دو منحنی در ربع سوم نیز به همین ناحیه $1 \leq u \leq 9$ و $1 \leq v \leq 4$ تصویر می‌شود؛ بنابراین برای به‌دست آوردن حاصل صحیح، باید جواب به دست آمده را ۲ برابر کنیم. اما به نظر می‌رسد طراح محترم به این موضوع توجه نداشته و فقط یکی از این نواحی را در نظر گرفته است!! دقت شود این سؤال تقریباً با کمی تغییر تست ۲۸ صفحه‌ی ۳۳۴ کتاب ریاضی عمومی (۲) چاپ ۲۰ مدرسان شریف می‌باشد ولی آن‌جا طراح قید «ربع اول» را در صورت سؤال گذاشته بود و بنابراین نیازی به دو برابر کردن نبود.



۱۰- گزینه «۴» با یک سؤال بسیار خوب روبه‌رو هستیم! اگر بخواهیم از روش عادی سؤال را حل کنیم دچار دردسر خواهیم شد. در صفحه‌ی ۵۵۸ کتاب ریاضی عمومی (۲) چاپ ۲۰ مدرسان شریف گفته‌ایم در این‌گونه موارد بهتر است تابع اسکالر f را به صورت $\vec{F} \cdot \vec{n}$ بنویسیم تا بتوانیم سؤال را راحت با استفاده از قضیه دیورژانس حل کنیم. سطح داده شده بسته نیست، زیرا فقط شامل نیم‌کره‌ی بالایی به شعاع ۱ است. اما با افزودن صفحه‌ی $z = 0$ یک ناحیه‌ی بسته خواهیم داشت که می‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس در آن استفاده کنیم. اما ابتدا $\vec{n}$ یعنی بردار قائم یک‌ه و رو به خارج رویه S را به دست آوریم:

$$\vec{n} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = (x, y, z)$$

حالا با فرض $\vec{F} = (P, Q, R)$ و تشکیل $\vec{F} \cdot \vec{n}$ داریم:

خب، حالا با برابر قرار دادن این عبارت، با تابع مقابل انتگرال داریم:

و راحت‌ترین انتخاب برای P ، Q و R به صورت $P = e^{z^2}$ ، $Q = e^{z^2} + y$ و $R = 1$ است. پس $\vec{F} = (e^{z^2}, e^{z^2} + y, 1)$. حالا می‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم:

$$I_1 = \iiint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_V (2z + 1 + 0) dv = \iiint_V dv = V$$

حجم ناحیه V یک نیم‌کره به شعاع ۱ است، مقدار این انتگرال $\frac{2}{3}\pi(1)^3 = \frac{2}{3}\pi$ خواهد بود. اما این پایان کار نیست. حالا باید مقدار انتگرال و با توجه به اینکه ناحیه‌ی V یک نیم‌کره به شعاع ۱ است، مقدار این انتگرال $\frac{2}{3}\pi(1)^3 = \frac{2}{3}\pi$ خواهد بود. اما این پایان کار نیست. حالا باید مقدار انتگرال سطح اولیه بر روی سطح $z = 0$ را از این مقدار کم کنیم. برای این کار با تقاطع این صفحه و نیم‌کره، به دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$ می‌رسیم، از طرفی برای این صفحه بردار رو به خارج $-\vec{k}$ است در نتیجه داریم:

$$I_2 = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{z=0} (e^{z^2}, e^{z^2} + y, 1) \cdot (0, 0, -1) d\sigma = \iint_{z=0} (-1) d\sigma = -\iint_{z=0} d\sigma$$

توجه داشته باشید انتگرال پایانی همان مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ است، پس $I_2 = \pi$ بوده و مقدار نهایی برابر است با:

توجه: نمونه این سؤال مثال ۴۷ در صفحه ۵۵۹ کتاب ریاضی عمومی (۲) چاپ ۲۰ مدرسان شریف است که تکنیک حل و بردار $\vec{n}$ یکسان است.

سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱- اگر f تابعی فرد باشد و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ ، آنگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(-xe^{-x}) + f(x^2 - x^5) + f(x^2 - x^2))$ کدام است؟

- (۱) a (۲) $-3a$ (۳) $-a$ (۴) $2a$

۲- کدام سری همگرا است؟

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n + e^n}$

۳- اگر تابع f در معادله $\cos(f(x)) + \frac{1}{\pi^2}(f(x))^2 + 2f(x) = 1 + x$ صدق کند، آنگاه مقدار $2f'(0) + f'(\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{\pi + 6}$ (۲) $\frac{\pi + 6}{2\pi + 6}$ (۳) $\frac{\pi + 6}{\pi}$ (۴) $\frac{2\pi + 6}{\pi + 6}$

۴- اگر $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n + n^2)x^n$ ، آنگاه $f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 9 (۳) 10 (۴) 11

۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و محور x ها در بازه $[1, e^2]$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 4 (۳) 3 (۴) 2

۶- طول منحنی $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$ در بازه $[1, 3]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{19}{3}$ (۲) $\frac{25}{3}$ (۳) $\frac{26}{3}$ (۴) $\frac{28}{3}$

۷- کوتاه‌ترین فاصله بیضی به معادله $x^2 + xy + y^2 = 12$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) 4 (۴) $2\sqrt{2}$

۸- مقدار $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} - 1$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $1 + \sqrt{2}$

۹- حجم جسم محصور به استوانه $x^2 + z^2 = 9$ و صفحات $x - y + z = 0$ و $x - y + z + 4 = 0$ کدام است؟

- (۱) 72π (۲) 36π (۳) 18π (۴) 9π

۱۰- اگر C منحنی فصل مشترک رویه‌های $x + y = 2a$ و $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$ در جهت راست‌گرد، مقدار $\oint_C y dx + z dy + x dz$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}\pi a^2$ (۲) $-\sqrt{2}\pi a^2$ (۳) $\sqrt{2}\pi a^2$ (۴) $2\sqrt{2}\pi a^2$



پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۳» با توجه به اینکه هر تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس حتماً $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -a$ است. در نتیجه با استفاده از قوانین هم‌ارزی چندجمله‌ای‌ها در همسایگی $x = 0$ داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(-xe^{-x}) + f(x^{\sqrt{}} - x^{\Delta}) + f(x^{\sqrt{}} - x^{\sqrt{}})) \sim \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(-xe^{-x}) + f(x^{\sqrt{}}) + f(-x^{\sqrt{}})) = (f(-0^- \times 1) + f((0^-)^{\sqrt{}}) + f(-(0^-)^{\sqrt{}}))$$

$$L = (f(0^+) + f(0^-) + f(-(0^+))) = (f(0^+) + f(0^-) + f(0^-)) = a - a - a = -a$$

۲- گزینه «۱» برای بررسی همگرایی دو سری اول، با توجه به اینکه هر دو دنباله نزولی و مثبت هستند، از آزمون تراکم کوشی کمک می‌گیریم. یعنی داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{n}}{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}$$

در این مرحله از آزمون مقایسه به این صورت استفاده می‌کنیم:

پس سری اولیه نیز همگراست. سایر گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(1-\ln 2)}} \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(1-\ln 2)}} > \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(1-\ln 2)}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

در این مرحله باتوجه به اینکه $1 - \ln 2 > 0$ است با کمک آزمون مقایسه داریم:

پس سری اولیه نیز واگراست.

در بررسی گزینه (۳)، با استفاده از هم‌ارزی در بی‌نهایت که $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ میل می‌کند، داریم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ که واضح است سری هم‌ارز یک سری واگراست، پس

سری اولیه نیز واگراست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n}{n + e^n} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^n = \infty$$

برای بررسی گزینه (۴)، شرط لازم همگرایی هر سری را بررسی می‌کنیم:

پس این سری نیز واگراست.

۳- گزینه «۴» قبل از هر چیز، نقاط داده شده را در تساوی داده شده جایگذاری می‌کنیم. برای $x = 0$ داریم:

$$\cos(f(x)) + \frac{\lambda}{\pi^{\sqrt{}}} (f(x))^{\sqrt{}} + \sqrt{f(x)} = 1 + x \Rightarrow \cos(f(0)) + \frac{\lambda}{\pi^{\sqrt{}}} (f(0))^{\sqrt{}} + \sqrt{f(0)} = 1$$

$$\cos(f(\pi)) + \frac{\lambda}{\pi^{\sqrt{}}} (f(\pi))^{\sqrt{}} + \sqrt{f(\pi)} = 1 + \pi$$

با کمی دقت می‌توان فهمید که حتماً باید $f(0) = 0$ باشد. به طور مشابه برای $x = \pi$ داریم:

در این حالت هم می‌توان فهمید که حتماً باید $f(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{}}$ باشد. حالا از طرفین تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$-f'(x) \sin(f(x)) + \frac{\sqrt{f}}{\pi^{\sqrt{}}} f'(x) (f(x))^{\sqrt{}} + \sqrt{f}'(x) = 1$$

$$-f'(0) \sin(f(0)) + \frac{\sqrt{f}}{\pi^{\sqrt{}}} f'(0) (f(0))^{\sqrt{}} + \sqrt{f}'(0) = 1 \Rightarrow -f'(0) \sin(0) + \frac{\sqrt{f}}{\pi^{\sqrt{}}} f'(0) (0)^{\sqrt{}} + \sqrt{f}'(0) = 1 \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{\sqrt{}}$$

$$-f'(\pi) \sin(f(\pi)) + \frac{\sqrt{f}}{\pi^{\sqrt{}}} f'(\pi) (f(\pi))^{\sqrt{}} + \sqrt{f}'(\pi) = 1$$

$$\Rightarrow -f'(\pi) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{}}\right) + \frac{\sqrt{f}}{\pi^{\sqrt{}}} f'(\pi) \left(\frac{\pi}{\sqrt{}}\right)^{\sqrt{}} + \sqrt{f}'(\pi) = 1 \Rightarrow f'(\pi) \left(-1 + \frac{\pi}{\pi} + \sqrt{f}'(\pi)\right) = 1 \Rightarrow f'(\pi) = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\sqrt{}}} = \frac{\pi}{\pi + \sqrt{f}} \Rightarrow \sqrt{f}'(0) + f'(\pi) = 1 + \frac{\pi}{\pi + \sqrt{f}} = \frac{\sqrt{f} + \pi + \sqrt{f}}{\pi + \sqrt{f}}$$

۴- گزینه «۳» اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ را برای $|x| < 1$ در نظر بگیرید، به نظر می‌رسد سری آمده در سؤال هم‌خانواده‌ی آن است، ولی با توجه به وجود ضرایب n^2 و $2n$ باید با مشتق‌گیری از این سری، سری خواسته شده را به دست آوریم. به این صورت که:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2n)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \xrightarrow{\times x^2} \frac{x^2}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{2x^2(1-x)^{-2} + 2(1-x)^{-2}x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^{n+1} \\ \frac{2x^2(1-x)^{-2} + 2(1-x)^{-2}x^2}{(1-x)^4} &= \frac{2x^2 - x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^{n+1} \xrightarrow{\div x} \frac{2x - x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n \Rightarrow f(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^4} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{8}} = 14 \end{aligned}$$

۵- گزینه «۲» با توجه به اینکه به ازای $x \geq 1$ تابع داده شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است (یعنی بالای محور x قرار می‌گیرد) پس کافی است مستقیماً انتگرال تابع را در این بازه محاسبه کنیم تا مساحت موردنظر به دست آید. یعنی داریم:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\ \text{برای حل این انتگرال، از تغییر متغیر } x = t^2 \text{ کمک می‌گیریم:} \\ x = t^2 &\Rightarrow \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \\ \Rightarrow S &= \int \ln t^2 (2t dt) = 2 \int 2t \ln t dt = 4 \int t \ln t dt = 4(t \ln t - t) = 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) - \sqrt{x}) \Big|_1^{e^2} = 4[(e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)] = 4 \end{aligned}$$

۶- گزینه «۳» با توجه به رابطه‌ی طول قوس منحنی $y = f(x)$ که به صورت $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ است و با استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$y = \int_0^x \sqrt{t^4 - 1} dt \Rightarrow y' = \sqrt{x^4 - 1} \Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + (x^4 - 1) = x^4 \Rightarrow L = \int_1^3 \sqrt{x^4} dx = \int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{26}{3}$$

۷- گزینه «۴»

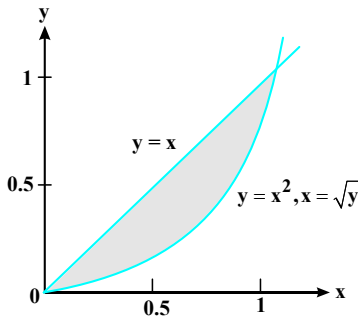
روش اول: در واقع خواسته سؤال مینیمم کردن تابع $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ با شرط $d = \sqrt{x^2 + y^2} - 12 = 0$ است. برای راحتی کار به جای تابع فاصله، توان ۲ آن را در نظر می‌گیریم یعنی $f(x, y) = x^2 + y^2$ و با استفاده از روش ساده شده‌ی لاگرانژ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{f_x}{g_x} &= \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{2x}{2x+y} = \frac{2y}{2y+x} \Rightarrow 4xy + 2x^2 = 4xy + 2y^2 \Rightarrow x = \pm y \\ x = y &\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow f(x, y) = 4 + 4 = 8 \Rightarrow d = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ x = -y &\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = x^2 - x^2 + x^2 = x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} \Rightarrow y = \mp\sqrt{12} \Rightarrow f(x, y) = 12 + 12 = 24 \Rightarrow d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه خواسته سؤال مقدار مینیمم است، پس $d = 2\sqrt{2}$ صحیح است.

روش دوم: از تبدیل سؤال به مختصات قطبی کمک می‌گیریم. ابتدا شرط داده شده‌ی سؤال را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy &= 12 \Rightarrow r^2 + r^2 \cos \theta \sin \theta = r^2 (1 + \cos \theta \sin \theta) = 12 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{12}{1 + \sin \theta \cos \theta}} = \sqrt{\frac{24}{2 + \sin 2\theta}} \\ \text{با توجه به این که خواسته‌ی سؤال مینیمم کردن فاصله از مبدا یعنی همان } r \text{ در مختصات قطبی است، برای این منظور کافیست مخرج عبارت بدست آمده را ماکزیمم کنیم که به ازای } \sin 2\theta = 1 \text{ رخ می‌دهد. در نتیجه خواهیم داشت:} \\ r &= \sqrt{\frac{24}{2+1}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



۸- گزینه «۱» ابتدا ناحیهی انتگرال گیری را مشخص می‌کنیم. با توجه به شکل تابع زیر انتگرال، به نظر می‌رسد تغییر ترتیب انتگرال گیری کمکی به حل آن نکند. پس شانس خود را با تغییر متغیر قطبی امتحان می‌کنیم. با توجه به ناحیهی رسم شده، واضح است که حدود θ از صفر تا $\frac{\pi}{4}$ است. از طرفی هر خط شعاعی که از مبدأ رسم کنیم، از داخل ناحیه گذشته و از $y = x^2$ خارج می‌شود. پس برای حدود r داریم:

$$y = x^2 \Rightarrow r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta \Rightarrow r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

پس برای انتگرال در مختصات جدید داریم:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{dy dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} \frac{r dr d\theta}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \left. \frac{1}{\cos \theta} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

۹- گزینه «۲» با توجه به اینکه ناحیهی مورد نظر توسط یک استوانه و دو صفحه محدود شده است، از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم؛ ولی با یک تفاوت جزئی، و آن هم در راستای محور y بودن استوانه است. پس در مختصات استوانه‌ای که قصد استفاده از آن را داریم، به جای تعیین حدود z حدود y را به دست می‌آوریم. از طرفی واضح است که تصویر ناحیه بر صفحهی xOz همان $x^2 + z^2 = 9$ است، پس $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq r \leq 3$ خواهد بود و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = y \\ x + z + 4 = y \end{array} \right\} \Rightarrow x + z \leq y \leq x + z + 4$$

$$V = \iiint_V dv = \iint_{x+z}^{x+z+4} r dy dr d\theta = \iint_D 4r dr d\theta = 4 \iint_D r dr d\theta$$

اگر دقت کنید، انتگرال پایانی در واقع همان مساحت دایره‌ی $x^2 + z^2 = 9$ است، پس داریم:

$$V = 4(\pi \times 9) = 36\pi$$

۱۰- گزینه «۱» توجه داشته باشید که در بیشتر مواردی که پارامتری‌سازی مسیر انتگرال گیری اندکی وقت گیر است (به خصوص در موارد تقاطع یک رویه با یک صفحه) و یا اینکه بعد از پارامتری کردن، با جایگذاری متغیرهای پارامتری در تابع زیر انتگرال به یک انتگرال طولانی و گاهی غیرقابل حل برمی‌خوریم، بهتر است شانس خود را با قضیهی استوکس امتحان کنید. در این سوال حالت اول پیش آمده که اگر حتی منحنی را پارامتری کنید، به انتگرال حاصل ضرب چند تابع مثلثاتی برخورد می‌کنید که علی‌رغم نسبتاً ساده بودن آنها، وقت بیشتری نسبت به روش قضیهی استوکس می‌برد. پس با توجه به این موضوع و همچنین بسته بودن منحنی C ، برای حل این انتگرال، از قضیهی استوکس کمک می‌گیریم. یعنی داریم:

برای به دست آوردن $\iint_S \vec{n} \cdot d\vec{\sigma}$ از صفحهی $x + y = 2a$ و بردار نرمال آن استفاده می‌کنیم:

از طرفی برای تابع برداری $\vec{F}$ داریم:

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \vec{i}(0-1) - \vec{j}(1-0) + \vec{k}(0-1) = (-1, -1, -1) \Rightarrow \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} = (-1, -1, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \frac{-1-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S (-\sqrt{2}) d\sigma = -\sqrt{2} \iint_S d\sigma$$

بنابراین داریم:

اما می‌دانیم انتگرال پایانی همان مساحت ناحیهی S است که توسط ناحیهی C احاطه شده است. اما برای محاسبه مساحت این ناحیه به اندکی دقت احتیاج داریم. اگر معادلهی رویه‌ی داده شده در سوال را به صورت $(x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = 2a^2$ بازنویسی کنیم، مشاهده می‌شود که مرکز این کره یعنی $(a, a, 0)$ روی صفحهی $x + y = 2a$ قرار دارد. این یعنی منحنی حاصل از برخورد این صفحه‌ی با کره، در واقع دایره‌ای با مرکز منطبق بر مرکز کره است. می‌دانیم برای چنین دایره‌ای شعاع برابر همان شعاع کره، یعنی $\sqrt{2}a$ است، پس داریم:

$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -\sqrt{2} \iint_S d\sigma = -\sqrt{2}(\pi \times 2a^2) = -2\sqrt{2}\pi a^2$$