سؤالات ریاضی مهندسی

۱ـ اگر $u(x,t)$ جواب مسئله موج زیر باشد، مقدار تقریبی $u(0/4, 1/3)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < 2, t > 0 \\ u(x,0) = 2x + 1 \\ u_t(x,0) = x \quad , \ 0 \le x \le 2 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \ , \ t \ge 0 \end{cases}$$

۱) ۱/۲۴
۲) ۱/۷۹
۳) ۱/۹۶
۴) ۲/۱۵

۲ـ فرض کنید $z = x + iy$ باشد. مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ در دامنه مربعی شکل $D = \{(x,y), 0 \le x, y \le 2\pi\}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $e^{2\pi}$
۳) $\sinh 2\pi$
۴) $\cosh 2\pi$

۳ـ جواب مسئله پواسن زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \omega}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \dfrac{\sin\theta}{r^2} \ , \ 0 < r < 2 \ , \ 0 < \theta < 2\pi \\ \omega(r, 0) = 0 \\ \omega(2, \theta) = \sin 3\theta \end{cases}$$

۱) $\omega(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin 3n\theta$

۲) $\omega(r,\theta) = \frac{1}{2} r \sin\theta + \frac{1}{8} r^3 \sin\theta$

۳) $\omega(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (r^n + r^{-n}) \sin 3n\theta$

۴) $\omega(r,\theta) = (\frac{1}{2} r - 1)\sin\theta + \frac{1}{8} r^3 \sin 3\theta$

۴ـ انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2} \cos(\omega x) d\omega$

۲) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2} \omega\cos(\omega x) d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2} \cos(\omega x) d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2} \omega\cos(\omega x) d\omega$

۵ـ اگر C مرز نیم‌دایره فوقانی $|z| = r$ در جهت مثبت و $I(r) = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ باشد، $\lim_{r \to \infty} I(r)$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) π
۴) ∞

۶ـ مسئله گرمای زیر را در نظر بگیرید، اگر $v(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $v(x,s)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 3u(x,t) \ , \ x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = -e^{-x} \quad , \ x > 0 \\ u(0,t) = 0 \quad , \ t \ge 0 \end{cases}$$

۱) $4v''(x,s) + (3-s)v(x,s) = e^{-x}$

۲) $v''(x,s) + (4s-3)v(x,s) = e^{-x}$

۳) $4v''(x,s) + (s-3)v(x,s) = se^{-x}$

۴) $v''(x,s) + (3-4s)v(x,s) = se^{-x}$

۷ـ معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شـود. $v(x,0)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x - 1 \ , \ 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 3 \quad , u(2,t) = -1 \ , t > 0 \\ u(x,0) = 1 - x^3 \quad , \ 0 < x < 2 \end{cases}$$

۱) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - 2$

۲) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2$

۳) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + 3$

۴) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 3$

۸ـ اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u(x,y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ با شرط $v(0,0) = 0$ باشد، مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۴
۴) ۴-

۹ـ اگر $F_s\{f(x)\}=\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$ تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}e^{-2\omega}$ ۲) $\frac{\pi}{2}e^{2\omega}$ ۳) $\pi e^{-2\omega}$ ۴) $e^{2\omega}$

۱۰ـ سری نیم‌دامنه سینوسی تابع $f(x)=x(\pi-x)$ در فاصله $0<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1)x$ ۲) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8}{(2m+1)^3\pi}\sin(2m+1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m\pi}\sin 2mx$ ۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3\pi}\sin 2mx$

۱۱ـ اگر $F(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i\omega x}dx$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه جواب مسئله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)\ ,\ t>0\ ,x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=0\ ,\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

۱) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$ ۲) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$ ۳) $\int_0^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$ ۴) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۱۲ـ فرض کنید تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ برای هر $z\in\mathbb{C}$ در نامساوی $|f(z)-2z^2-iz|\le\sqrt{2}$ صدق کند. در این‌صورت مقدار $\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right)dz$ کدام است؟

۱) $2\pi i$ ۲) $-2\pi i$ ۳) 2π ۴) -2π

۱۳ـ تصویر خط راست $2x+3y=5$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{1}{z}$، کدام است؟

۱) $(u-\frac{1}{5})^2+(v+\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$ ۲) $(u-\frac{1}{5})^2+(v-\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۳) $(u+\frac{1}{5})^2+(v-\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$ ۴) $(u+\frac{1}{5})^2+(v+\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۱۴ـ فرم کلی جواب مسئله موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t)-9\nabla^2u(x,y,t)=\begin{cases} te^{-|x+y|} & 0<x<1 \\ 0 & x>1\end{cases}\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,t>0 \\ u(x,y,0)=\begin{cases} x+y & 0<x<1\ ,\ -2<y<2 \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases} \\ u_t(x,y,0)=0\ ,\ x>0, y\in\mathbb{R} \\ u(0,y,t)=0\ ,\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

۱) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۲) $u(x,y,t)=\int_{-2}^{2}\int_0^1(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۳) $u(x,y,t)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۴) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۱۵ـ اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y''-4y'+3y=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1\end{cases}$ با شرط $\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}y'(x)=0$ باشد، تبدیل فوریه $y(x)$ کدام است؟

(راهنمایی: $F\{y(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}y(x)e^{-i\omega x}dx$)

۱) $\frac{\sin 2\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$ ۲) $\frac{\sin\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$ ۳) $\frac{-2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$ ۴) $\frac{2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$

پاسخنامه ریاضی مهندسی

۱ـ گزینه «۲» از سؤالات بسیار پرتکرار در آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری که هم در کتاب و هم در آزمون‌های آزمایشی هم بر روی آن تمرکز ویژه‌ای داشته‌ایم. از روش جبری کمک می‌گیریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2c}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

که در این سؤال $c=3$، $x=0/4$ و $t=1/3$ است. چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس دوره تناوب $4=2\times 2$ است. با این توضیحات سراغ محاسبه می‌رویم:

$$u(0/4,1/3)=\frac{1}{2}[f^*(0/4+3\times 1/3)+f^*(0/4-3\times 1/3)]+\frac{1}{2\times 3}[G^*(0/4+3\times 1/3)-G^*(0/4-3\times 1/3)]$$

$$=\frac{1}{2}[f^*(4/3)+f^*(-3/5)]+\frac{1}{2}[G^*(4/3)-G^*(-3/5)]$$

دقت کنید مقادیر داخل پرانتزها یعنی دو عدد $4/3$ و $-3/5$ خارج از بازه‌ی $[0,2]$ هستند، پس باید با استفاده از دوره تناوب آن‌ها را درون بازه بیاوریم! اگر به اندازه‌ی یک دوره تناوب از $4/3$ کم کنیم، به عدد $0/3$ و اگر به اندازه یک دوره تناوب به $-3/5$ اضافه کنیم، به عدد $0/5$ می‌رسیم، پس داریم:

$$u(0/4,1/3)=\frac{1}{2}[f^*(0/3)+f^*(0/5)]+\frac{1}{6}[G^*(0/3)-G^*(0/5)]$$

ضابطه‌ی f که معلوم است، $f=2x+1$. ضابطه‌ی G هم با انتگرال‌گیری از $g(x)=x$ به‌دست می‌آید:

$$G(x)=\int_0^x g(x)\,dx=\frac{x^2}{2}$$

پس داریم:

$$u(0/4,1/3)=\frac{1}{2}[2\times 0/3+1+2\times 0/5+1]+\frac{1}{6}\left[\frac{(\frac{3}{10})^2}{2}-\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}\right]=\frac{1}{2}[1/6+2]+\frac{1}{6}\left[\frac{\frac{9}{100}-\frac{1}{4}}{2}\right]=1/8+\frac{1}{12}\left[\frac{9-25}{100}\right]$$

$$=1/8+\frac{1}{12}\left[-\frac{16}{100}\right]=1/8-\frac{1}{75}$$

که تقریباً برابر با ۱/۷۹ می‌شود.

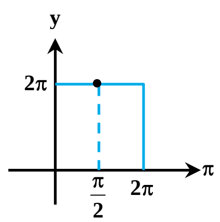
توضیح: سؤال فی‌نفسه سؤال راحتی از این نوع طیف سؤالات بود، چون به روش جبری حتی نیاز به استفاده از گسترش توابع f^* و G^* هم نداشتیم. اما محاسبات اعشاری آن کمی جالب نبود!

۲ـ گزینه «۴» در مثال متن کتاب، بخش توابع هذلولی مختلط ثابت کردیم که $|\sin z|$ برابر با $\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$ است. می‌توانید اندازه $\sin z$ را از رابطه‌ی زیر حساب کنید:

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\cosh y$$

پس $|\sin z|$ قطعاً بزرگ‌تر یا مساوی $\sinh y$ است؛ چون حداقلِ $\sin^2 x$ صفر است، از طرفی می‌توان نوشت:

$$|\sin z|=\sqrt{1-\cos^2 x+\cosh^2 y-1}=\sqrt{\cosh^2 y-\cos^2 x}$$



چون حداقلِ $\cos^2 x$ صفر است، پس حداکثر $\sin z$ هم برابر با $\cosh y$ است. ماکزیمم $\cosh z$ در ناحیه مشخص شده برابر با $\cosh 2\pi$ است. در واقع ماکزیمم روی مرز اتفاق و در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{2},2\pi)$ می‌افتد. البته در صورت تسلط بر روی اصل ماکزیمم و کمی تجربه به راحتی می‌شود با توجه به شکل مقابل گفت؛ ماکزیمم در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{2},2\pi)$ رخ می‌دهد و با توجه به رابطه‌ی $\sin z$ به وضوح $\text{Max}\,|\sin z|=\cosh 2\pi$ است.

۳ـ گزینه «۴» از سؤالاتی است که سابقه طرح در آزمون‌های تستی را ندارد! البته همه می‌دانیم روش رد گزینه اکثر اوقات یاریگر ما در روبه‌رو شدن با سؤالات اینچنینی است. ابتدا روش تشریحی سؤال را ارائه می‌دهیم. با توجه به این که عامل ناهمگنی برابر با $\frac{\sin\theta}{r^2}$ می‌باشد، بنابراین معادله پواسون که همان معادله لاپلاس ناهمگن است به فرم زیر تبدیل می‌گردد:
$\omega(r,\theta)=u(r,\theta)-\sin\theta$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(r,0)=0 \\ u(2,\theta)=\sin\theta+\sin 3\theta \end{cases}$$

می‌دانیم که معادله لاپلاس روی یک دیسک مثلاً در این سؤال $0<\theta<2\pi$ با $0<r<2$ دارای جوابی به صورت زیر می‌باشد: (در متن کتاب مطرح شده است)

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

حال با در نظر گرفتن شرط $u(r,0)=0$ خواهیم داشت $A_n=0$ (برای $n=0,1,2,3$). همچنین مطابق با شرط $u(2,\theta)=\sin\theta+\sin 3\theta$ ضرایب $B_1=\frac{1}{2}$ و $B_3=\frac{1}{8}$ به دست می‌آیند. در نتیجه داریم:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}r\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin 3\theta$$

در نهایت با جایگزینی به دست می‌آوریم:

$$\omega(r,\theta)=u(r,\theta)-\sin\theta=\frac{1}{2}r\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin 3\theta-\sin\theta=(\frac{1}{2}r-1)\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin 3\theta$$

روش رد گزینه : با توجه به شرایط مرزی اگه به جای r عدد ۲ قرار بدیم باید به $\sin 3\theta$ برسیم، به وضوح گزینه (۴) تو این شرایط صدق می‌کنه!!

۴ـ گزینه «۳» سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده است. با توجه به این که تابع زوج است، پس تبدیل فوریه کسینوسی باید مورد استفاده قرار بگیرد:

$$I=F_c(\omega)=\int_0^{\infty}|\sin x|\cos\omega x dx=\int_0^{\pi}\sin x\cos\omega x dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء داریم:

چون مشتق صفر نمی‌شود، لذا در مرحله‌ی سوم انتگرال می‌گیریم:

مشتق	انتگرال
$\oplus$ $\cos\omega x$	$\sin x$
$\ominus$ $-\omega\sin\omega x$	$-\cos x$
$\oplus$ $-\omega^2\cos\omega x$	$-\sin x$ → انتگرال می‌گیریم

$$I=-[\cos x\cos\omega x]_0^{\pi}-[\omega\sin x\sin\omega x]_0^{\pi}+\omega^2 I$$

$$\Rightarrow(1-\omega^2)I=1+\cos\pi\omega \Rightarrow I=F_c(\omega)=\frac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos\pi x}{1-\omega^2}\cos\omega x d\omega$$

۵ـ گزینه «۱» سؤال را می‌توان به دو روش حل کرد:

روش اول: از قضیه مانده‌ها کمک می‌گیریم، دقت کنید طبق توضیحات صفحه‌ی ۲۸۲ کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف، چون حولِ مانده یک گردش کامل نداریم، به جای $2\pi i$ باید حاصل انتگرال در πi ضرب شود.

$$I(r)=\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z}=\pi i[\frac{e^{iz}}{1}]_{z=0}=\pi i$$

که $|I(r)|=\pi$ می‌شود. اما عجله نکنید! برای انتخاب گزینه (۳)، چون $r\to\infty$ داده شده و منحنی C به صورت $|z|=\infty$ است، یعنی مانده در بی‌نهایت هم باید حساب شود. می‌دانیم مقدار مانده در بی‌نهایت قرینه‌ی مجموع مانده‌ها در نقاط تکین است، یعنی مانده در بی‌نهایت برابر با ۱- است و لذا حاصل انتگرال صفر است.

روش دوم: طبق لم جردن داریم:

$$|\int_C\frac{e^{iz}}{z}dz|\le\int_{z=re^{i\theta}}\frac{|e^{iz}|}{|z|}|dz|=\int_0^{\pi}\frac{e^{-r\sin\theta}}{r}rd\theta$$

برای $r\to\infty$ حد بالا صفر است.

۶ـ گزینه «۱» سؤال ساده‌ای است! طراح خودش به وضوح استفاده از تبدیل لاپلاس را پیشنهاد داده است. ابتدا دقت کنید که داریم:

$$L[u_t(x,t)] = su(x,s) - u(x,0)$$

در این سؤال طراح به جای $u(x,s)$ خواسته است که $v(x,s)$ بنویسیم! اشکال ندارد فقط یک نماد است و برای ما هم فرقی ندارد. در ادامه داریم:

$$sv(x,s) - u(x,0) - 4v''(x,s) = 3v(x,s) \Rightarrow 4v''(x,s) + (3-s)v(x,s) = e^{-x}$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا از طرفین رابطه‌ی $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ دو بار نسبت به x و در یک مرحله‌ی دیگر یک‌بار نسبت به t مشتق می‌گیریم و داریم:

$$u_{xx} = v_{xx} + r_{xx} \;,\; u_t(x,t) = v_t(x,t) + 0$$

حالا در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$v_{xx} + r_{xx} = v_t(x,t) + x - 1$$

بر اساس دو شرط اولیه صورت سؤال داریم:

$$u(0,t) = v(0,t) + r(0) \Rightarrow 3 = v(0,t) + r(0)$$

$$u(2,t) = v(2,t) + r(2) \Rightarrow -1 = v(2,t) + r(2)$$

برای این که شرایط مرزی برحسب v همگن شود باید $r(0) = 3$ و $r(2) = -1$ شود، بنابراین با دستگاه معادلات زیر برای همگن شدن معادله و شرایط مرزی آن روبه‌رو هستیم:

$$\begin{cases} r_{xx} = x - 1 \Rightarrow r_x = \dfrac{x^2}{2} - x + c_1 \Rightarrow r(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + c_1x + c_2 \\ r(0) = 3 , r(2) = -1 \end{cases}$$

حالا از شرط $r(0) = 3$ به راحتی c_2 برابر با ۳ به‌دست می‌آید و از شرط $r(2) = -1$ داریم:

$$-1 = \frac{2^3}{6} - \frac{2^2}{2} + c_1(2) + 3 \Rightarrow -4 = \frac{4}{3} - 2 + 2c_1 \Rightarrow 2c_1 = -2 - \frac{4}{3} \Rightarrow c_1 = -\frac{5}{3}$$

بنابراین داریم: $r(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5}{3}x + 3$.

ما دنبال $v(x,0)$ هستیم. اگر دوباره به تغییر متغیر صورت سؤال برگردیم، رابطه‌ی مقابل را داریم: $v(x,0) = v(x,0) + r(x)$

$$\Rightarrow 1 - x^3 = v(x,0) + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3}x + 3 \Rightarrow v(x,0) = -\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2$$

روش تستی: خُب از شرط صورت سؤال داریم: $u(x,t) = v(x,t) + r(x) \qquad (*)$

با توجه به داده‌های دیگر دو شرط $u(0,t) = 3$ و $u(2,t) = -1$ داریم، پس از این دو شرط فعلاً کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} u(0,t) = v(0,t) + r(0) \Rightarrow 3 = v(0,t) + r(0) \\ u(2,t) = v(2,t) + r(2) \Rightarrow -1 = v(2,t) + r(2) \end{cases}$$

چون قراره معادله برحسب v یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن باشه، پس باید $v(0,t) = v(2,t) = 0$ باشه، بنابراین $r(0) = 3$ و $r(2) = -1$ نتیجه‌ای که تا اینجا داریم. دنبال $v(x,0)$ هستیم؛ در رابطه‌ی $(*)$ به جای t ها صفر قرار می‌دیم:

$$u(x,0) = v(x,0) + r(x) \Rightarrow v(x,0) = u(x,0) - r(x) \Rightarrow \boxed{v(x,0) = 1 - x^3 - r(x)}$$

اگه در طرفین رابطه‌ی فوق به جای x ها عدد صفر رو قرار بدیم، داریم: $v(0,0) = 1 - 0 - r(0) \xrightarrow{r(0)=3} v(0,0) = -2$

تو گزینه‌ها فقط گزینه‌های (۱) و (۲) هستن که اگه به جای x های اونا صفر قرار بدیم، مقدارشون برابر منفی (۲) میشه، پس تا اینجا گزینه‌های (۳) و (۴) میپرن!

حالا برای انتخاب از بین گزینه‌های (۱) و (۲) از شرط $r(2) = -1$ کمک می‌گیریم: $v(2,0) = 1 - 2^3 - r(2) \Rightarrow v(2,0) = 1 - 8 - (-1) = -6$

کافیه از بین گزینه‌های (۱) و (۲) تو یکی به جای x عدد ۲ قرار بدیم، مثلاً در گزینه (۲) داریم:

$$v(2,0) = -\frac{7}{6}(2^3) + \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{5}{3} \times 2 - 2 = -\frac{7 \times 4}{3} + 2 + \frac{10}{3} - 2 = \frac{-28 + 6 + 10 - 6}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

پس همین گزینه جوابه . میتونین تو گزینه (۱) به جای x، عدد ۲ رو قرار بدین و ببینین که برابر با ۶- نمیشه! (اگه این کارو هم میکردین باز هم می‌تونستین بدون محاسبه‌ی گزینه (۲)، به جواب برسین فرقی نداره!)

۸ـ گزینه «۳» از سؤالات تکراری که چند بار تاکنون عین آن طرح شده است! یک روش این است که به جای y ها، صفر و به جای x ها، z قرار دهیم و مستقیم به ضابطه‌ی z برسیم و روش دیگر مبتنی بر فرمول زیر است:

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int(\text{عبارتی که از حذف توابع شامل } y \text{ در ضابطه‌ی } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود})dx$$

$$v=\int[۲(x^۲-y^۲+۱)(۲x)-۸xy^۲]dy-\int(۰)dx=۴x^۳y-\frac{y^۳}{۳}\times ۴x+۴xy-\frac{۸xy^۳}{۳}+c=۴x^۳y-\frac{۱۲xy^۳}{۳}+۴xy+c$$

$$\Rightarrow v(x,y)=۴xy(x^۲-y^۲+۱)+c\xrightarrow{v(۰,۰)=۰}c=۰\Rightarrow v(x,y)=۴xy(x^۲-y^۲+۱)\Rightarrow v(۱,۱)=۴$$

روش دیگر: وقتی u را داریم می‌توانیم از فرمول مقابل به z و بعد از آن به v برسیم. $f(z)=u(z,۰)+iv(z,۰)$

در ضابطه‌ی $u(x,y)$ به جای تمام x ها z و به جای تمام y ها صفر قرار می‌دهیم: $f(z)=(z^۲+۱)^۲+iv(z,۰)$

با توجه به این که $v(۰,۰)=۰$، پس $f(۰)=۱$ و با توجه به ضابطه‌ی u قطعاً $v(z,۰)=۰$ خواهد بود، لذا $f(z)=(z^۲+۱)^۲$. از این‌جا داریم:

$$f(z)=(z^۲+۱)^۲=(x^۲-y^۲+۱+i۲xy)^۲=v(x,y)+i۴xy(x^۲-y^۲+۱)\Rightarrow v(x,y)=۴xy(x^۲-y^۲+۱)\Rightarrow v(۱,۱)=۴$$

۹ـ گزینه «۱» به راحتی با استفاده از فرمول داریم:

$$F_s(\omega)=\int_۰^\infty\underbrace{\frac{x}{x^۲+۴}}_{\text{فرد}}\underbrace{\sin\omega x}_{\text{فرد}}dx=\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\omega x}{x^۲+۴}dx=I$$

دقت کنید برای این بازه‌ی انتگرال را به‌صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}$ نوشتیم تا از روش محاسبه‌ی انتگرال‌های حقیقی به کمک قضیه مانده‌ها کمک بگیریم. همان‌طور که در متن کتاب گفته‌ایم، داریم:

$$\mathbf{I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin ax\,dx=Im[۲\pi i\,(\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند})]}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}Im[۲\pi i\,\underset{z=۲i}{Res}\frac{ze^{i\omega z}}{z^۲+۴}]$$

دقت کنید که $z=۲i$ قطب ساده درون ناحیه (نیم‌صفحه‌ی فوقانی) است، لذا داریم:

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}Im[۲\pi i\frac{ze^{i\omega z}}{۲z}]_{z=۲i}=\frac{\pi}{۲}e^{-۲\omega}$$

۱۰ـ گزینه «۲» سؤال بسیار تکراری از سری فوریه است و اساساً جنبه‌ی محاسباتی دارد. سؤال را به دو روش حل می‌کنیم، روش اول، روش تشریحی و عادی حل سؤال است:

با توجه به اینکه سری فوریه سینوسی مدنظر است، لذا باید b_n را حساب کنیم:

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi x(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi(\pi x)\sin(nx)dx+\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi -x^۲\sin(nx)dx=۲\int_۰^\pi x\sin(nx)dx-\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi x^۲\sin(nx)dx=I_۱-I_۲$$

دو انتگرال جزء به جزء داریم که از روش جدول برای هر دوی آن‌ها کمک می‌گیریم:

	x	$\sin nx$
$\oplus$	۱	$\frac{-۱}{n}\cos(nx)$
$\ominus$	۰	$-\frac{۱}{n^۲}\sin nx$

$$\Rightarrow I_۱=۲[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{۱}{n}\sin nx]_۰^\pi=۲\times[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)]=-\frac{۲\pi}{n}\cos n\pi$$

برای محاسبه $I_۲$ داریم:

	$x^۲$	$\sin nx$
$\oplus$	$۲x$	$\frac{-۱}{n}\cos(nx)$
$\ominus$	۲	$-\frac{۱}{n^۲}\sin(nx)$
$\oplus$	۰	$+\frac{۱}{n^۳}\cos(nx)$

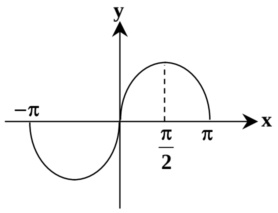
$$\Rightarrow I_۲=\frac{۲}{\pi}[-\frac{x^۲}{n}\cos(nx)+\frac{۲x}{n^۲}\sin(nx)+\frac{۲}{n^۳}\cos(nx)]_۰^\pi\Rightarrow I_۲=\frac{۲}{\pi}[(-\frac{\pi^۲}{n}\cos(n\pi)+\frac{۲}{n^۳}\cos n\pi-\frac{۲}{n^۳}\cos(۰)]$$

$$\Rightarrow I_۲=-\frac{۲\pi}{n}\cos n\pi+\frac{۴}{\pi n^۳}\cos(n\pi)-\frac{۴}{\pi n^۳}$$

بنابراین $b_n = I_۱ - I_۲$ برابر با مقدار مقابل است:
$$b_n = I_۱ - I_۲ = -\frac{۴}{\pi n^۳}\cos n\pi + \frac{۴}{\pi n^۳}$$

اگر n زوج باشد، آنگاه $\cos n\pi = ۱$ و لذا $b_n = ۰$ می‌شود و اگر n فرد باشد (یعنی $n = ۲m+۱$) آنگاه داریم:
$$b_n = -\frac{۴(-۱)}{\pi(۲m+۱)^۳} + \frac{۴}{\pi(۲m+۱)^۳} = \frac{۸}{(۲m+۱)^۳\pi}$$

همان‌طور که می‌بینید b_n به‌دست آمده همان b_n داده شده در گزینه (۲) می‌باشد.



روش دوم: دقت کنین، چون تابع پیوسته هستش، پس قطعاً سرعت رشد ضریب از درجه یک نیست و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن. از بین گزینه‌های (۴) و (۲) باید یکی رو انتخاب کنیم. هم از بحث تقارن می‌تونیم برای حذف کمک بگیریم و هم از روش مقدارگذاری؛ چون روش مقدارگذاری اطلاعاتی در حد دبیرستان نیاز داره، پس از اون کمک می‌گیریم:

برای مقدارگذاری می‌تونیم $x = \frac{\pi}{۲}$ در نظر بگیریم:
$$f(\frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi}{۲}(\pi - \frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi^۲}{۴}$$

با فرض $\pi^۲ \simeq ۱۰$، $f(\frac{\pi}{۲}) = ۲/۵$ هستش، پس واضحه که گزینه (۴) غلطه، چون به ازای $x = \frac{\pi}{۲}$، $\sin ۲mx = \sin x\pi = ۰$ میشه.

۱۱ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که تبدیل فوریه $u(x,t)$ را با $u(\omega,t)$ و تبدیل فوریه u_{xx} برابر با $(i\omega)^۲ u(\omega,t)$ است. حالا از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم، $\frac{du(\omega,t)}{dt} - a^۲[-\omega^۲ u(\omega,t)] = F(\omega,t)$ با یک معادله‌ی خطی مرتبه اول روبه‌رو هستیم:
$$u(\omega,t) = e^{-a^۲\omega^۲ t}[\int_۰^t F(\omega,t)e^{+a^۲\omega\tau}d\tau + C(\omega)]$$
$$u(\omega,۰) = ۰ \Rightarrow C(\omega) = ۰ \Rightarrow u(\omega,t) = \int_۰^t F(\omega,\tau)e^{-a^۲\omega^۲(t-\tau)}d\tau$$

۱۲ـ گزینه «۴» از سؤالاتی که در دو سال اخیر مورد توجه طراحان قرار گرفته است. سؤال مبتنی بر قضیه لیوویل طراحی شده است. چون سمت چپ نامساوی $|f(z) - ۲z^۲ - iz| \le \sqrt{۲}$ همه جا تحلیلی است، لذا داریم:
$$f(z) - ۲z^۲ - iz = c \Rightarrow f(z) = c + ۲z^۲ + iz \Rightarrow f(\frac{۱}{z}) = c + \frac{۲}{z^۲} + \frac{i}{z}$$

حالا سراغ محاسبه‌ی انتگرال می‌رویم:
$$I = \oint_{|z|=۱} f(\frac{۱}{z})dz = \oint_{|z|=۱} c\,dz + \oint_{|z|=۱}\frac{۲}{z^۲}dz + i\oint_{|z|=۱}\frac{۱}{z}dz \Rightarrow I = ۰ + ۰ + i\times ۲\pi i = -۲\pi$$

دقت کنید بر طبق انتگرال کوشی یعنی $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+۱}} = ۲\pi i\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}$، برای انتگرال‌های فوق، حاصل دو انتگرال صفر است و حاصل انتگرال دیگر برابر $۲\pi i f(۰) = ۲\pi i\times ۱ = ۲\pi i$ می‌شود که با ضرب در i شده، مقدار آن برابر با -۲π شد.

۱۳ـ گزینه «۱» یک سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده از نگاشت $w = \frac{۱}{z}$ طرح شده است. می‌دانیم تحت نگاشت $w = \frac{۱}{z}$، رابطه‌های $x = \frac{u}{u^۲+v^۲}$ و $y = \frac{-v}{u^۲+v^۲}$ را داریم و چون $۲x + ۳y = ۵$، لذا با جایگذاری داریم:
$$\frac{۲u}{u^۲+v^۲} - \frac{۳v}{u^۲+v^۲} = ۵ \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } u^۲+v^۲} ۲u - ۳v = ۵u^۲ + ۵v^۲ \Rightarrow ۵u^۲ - ۲u + ۵v^۲ + ۳v = ۰$$
$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۵}} u^۲ - \frac{۲}{۵}u + v^۲ + \frac{۳}{۵}v = ۰$$

حالا با اضافه و کم کردن اعداد مناسب سعی می‌کنیم متغیرهای u و v را به صورت مربع کامل بنویسیم:
$$[u^۲ - \frac{۲}{۵}u + (\frac{۱}{۵})^۲ - (\frac{۱}{۵})^۲] + [v^۲ + \frac{۳}{۵}v + (\frac{۳}{۱۰})^۲ - (\frac{۳}{۱۰})^۲] = ۰ \Rightarrow (u - \frac{۱}{۵})^۲ - \frac{۱}{۲۵} + (v + \frac{۳}{۱۰})^۲ - \frac{۹}{۱۰۰} = ۰ \Rightarrow (u - \frac{۱}{۵})^۲ + (v + \frac{۳}{۱۰})^۲ = \frac{۱۳}{۱۰۰}$$

۱۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیستند. سؤال فوق‌العاده غیر استاندارد می‌باشد و نه تنها در کتاب‌های کنکوری چنین سؤالاتی وجود ندارد، بلکه در کتاب‌های دانشگاهی و سؤالات پایان ترم هم چنین سؤالاتی طرح نمی‌شود. ظاهراً بحث فقط برای این بوده که کسی سؤال را جواب ندهد و ضمناً گزینه‌ها هم غلط هستند و سؤال باید حذف شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\begin{cases} te^{-|x+y|} & 0<x<1 \\ 0 & x>1\end{cases}=f(x,y,t)$$

تبدیل فوریه کلی روی y:

$$F(u(x,y,t))=\hat{u}(x,\omega,t)$$

$$F(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=(-i\omega)^2\hat{u}(x,\omega,t)=-\omega^2\hat{u}(x,\omega,t)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}-9\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}+9\omega^2\hat{u}=\hat{f}(x,\omega,t)$$

تبدیل فوریه سینوسی روی x :

$$F_s(\hat{u}(x,\omega,t))=\tilde{\hat{u}}(m,\omega,t)$$

$$F_s(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2})=\frac{2}{\pi}m\cancel{\hat{u}(0,\omega,t)}_{0}-m^2\tilde{\hat{u}}=-m^2\tilde{\hat{u}}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2}+9m^2\tilde{\hat{u}}+9\omega^2\tilde{\hat{u}}=\tilde{\hat{f}}(x,\omega,t)\Rightarrow\frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2}+\tilde{\hat{u}}\,9(m^2+\omega^2)=\tilde{\hat{f}}(x,\omega,t)$$

$$f(x,y,t)=te^{-|x+y|}\Rightarrow\hat{f}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega y}f(x,y,t)\,dy$$

$$\hat{f}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 te^{-|x+y|}e^{i\omega y}dy=\frac{t}{2\pi}\int_0^1 e^{-x-y+i\omega y}dy=\frac{te^{-x}}{2\pi}\left(\frac{1}{-1+i\omega}e^{y(i\omega-1)}\Big|_0^1\right)=\frac{te^{-x}}{2\pi}\left(\frac{1}{i\omega-1}\right)(e^{i\omega-1}-1)$$

$$\Rightarrow\tilde{\hat{f}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\hat{f}\sin mx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{te^{-x}}{2\pi}\left(\frac{1}{i\omega-1}\right)(e^{i\omega-1}-1)\sin mx\,dx$$

$$=\frac{t}{\pi^2}\left(\frac{1}{i\omega-1}\right)(e^{i\omega-1}-1)\int_0^\infty e^{-x}\sin mx\,dx=F(m,\omega)t+G(m,\omega)$$

پس برای معادله داریم:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2}+9(m^2+\omega^2)\tilde{\hat{u}}=f(m,\omega)t$$

پس برای جواب $\tilde{\hat{u}}$ داریم:

جواب عمومی $\tilde{\hat{u}}_n=A_{m,\omega}\cos 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t+B_{m,\omega}\sin 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t$

جواب خصوصی $\tilde{\hat{u}}_p=C_{m,\omega t}+D_{m,\omega}$

$$\Rightarrow\tilde{\hat{u}}=\tilde{\hat{u}}_h+\tilde{\hat{u}}_p=A_{m,\omega}\cos 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t+B_{m,\omega}\sin 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t+C_{m,\omega t}+D_{m,\omega}$$

اکنون جواب را به‌صورت $u(x,y,t)$ به‌دست می‌آوریم.

$$F_s^{-1}\{\tilde{\hat{u}}(m,\omega,t)\}=\hat{u}(x,\omega,t)=\int_0^\infty\tilde{\hat{u}}\sin mx\,dm$$

تبدیل معکوس کلی:

$$F^{-1}\{\hat{u}(x,\omega,t)\}=u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,\omega,t)e^{i\omega y}\,d\omega$$

$$\Rightarrow u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty(A_{m,\omega}\cos 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t+B_{m,\omega}\sin 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t+C_{m,\omega t}+D_{m,\omega})\times\sin mx\,e^{i\omega y}\,dm\,d\omega$$

تذکر مهم: در حالت کلی اگر بخواهیم با روش حذف گزینه سؤال را حل کنیم، گزینه چهار گزینه منطقی‌تری می‌باشد نسبت به بقیه. هر چند تمام گزینه‌ها غلط هستند. برای مثال متغیرهای انتگرال‌گیری در طرف دوم گزینه‌ها x و y نوشته شده است و این غلط است. پارامترهایی که نسبت به آنها انتگرال گرفته می‌شوند، پارامتر مربوط به انتگرال فوریه مثل امگا می‌باشند. جنس طرف اول گزینه‌ها با طرف دوم یکی نیست و این ایراد اساسی جواب‌ها است. حل صحیح در بالا نوشته شده است.

۱۵ــ گزینه «۳» از سؤالات نسبتاً ساده این آزمون! اگر فرض کنیم تبدیل فوریه $y(x)$ برابر با $Y(\omega)$ است، آنگاه تبدیل فوریه y' برابر با $i\omega Y(\omega)$ و تبدیل فوریه y'' برابر با $-\omega^۲ Y(\omega)$ است. لذا معادله‌ی زیر را داریم:

$$[(i\omega)^۲ - ۴(i\omega) + ۳]Y(\omega) = \frac{۲\sin\omega}{\omega} \Rightarrow -\omega^۲ Y(\omega) - ۴i\omega Y(\omega) + ۳Y(\omega) = \frac{۲\sin\omega}{\omega}$$

بنابراین داریم:

$$Y(\omega) = \frac{-۲\sin(\omega)}{\omega(\omega^۲ + ۴i\omega - ۳)}$$

توضیح: دقت کنید که تبدیل فوریه عبارت سمت راست به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\text{تبدیل فوریه عبارت سمت راست} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = ۲\int_{\circ}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx = ۲\int_{\circ}^{۱} ۱\times\cos(\omega x)\,dx = \frac{۲\sin\omega}{\omega}$$

دقت کنید چون تابع $f(x)$ زوج است، لذا حاصل قسمت سینوسی صفر است و فقط تبدیل کسینوسی داریم.