# نکته جالب در مورد سوال

# ریاضی مهندسی برق

سوال ۴۱ کنکور امسال عینا حتی بدون تغییر گزینه ها سوال ۳۰ صفحه ۱۹۷ کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف بود!

۴۰- می دانیم پاسخ معادلهٔ حرارت به صورت:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\ ,\ 0<x<l\ ,\ t>0$$

با شرایط مرزی $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+hu(l,t)=0$ به شکل زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}e^{-k_{n}^{2}c^{2}t}\cos(k_{n}x)$$

در این صورت $k_n$ها در کدام معادله زیر صدق می‌کنند؟

۱) $k_{n}\tan k_{n}l=-h$

۲) $k_{n}\tan k_{n}l=h$

۳) $k_{n}\cot k_{n}l=h$

۴) $k_{n}\cot k_{n}l=-h$

۴۱- حاصل $\oint_{C}\frac{z^{2}}{z-i}\log(\frac{z+1}{z-1})dz$ ، در صورتی که C دایره $|z-i|=\frac{1}{2}$ باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر کدام گزینه است؟

۱) $-i\pi^{2}$

۲) $\pi^{2}$

۳) $i\pi^{2}$

۴) $-\pi^{2}$

۴۲- مقدار انتگرال $\oint_{C}\frac{dz}{2-\sin z}$ بر روی دایره C به مرکز مبدأ و به شعاع $\frac{3}{2}$، کدام است؟ (C در جهت مثلثاتی پیموده شده)

۱) $0$

۲) $2\pi i[\frac{\pi}{2}-i\ln(2+\sqrt{3})]$

۳) $2\pi i[-\frac{\pi}{2}+i\ln(2+\sqrt{3})]$

۴) $2\pi i[\frac{\pi}{2}+i\ln(2+\sqrt{3})]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ریشهٔ مخرج $z=\frac{1}{3}$ است و واضح است این نقطه داخل دایره یکه قرار دارد:

$$\underset{z=\frac{1}{3}}{\operatorname{Res}}\left(\frac{3z}{3z-1}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{3z}{3\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\lim_{z\to\frac{1}{3}} z=\frac{1}{3}\Rightarrow I=2\pi i\times\frac{1}{3}=\frac{2\pi i}{3}$$

**مثال ۳۰: حاصل $I=\oint_C \frac{z^2}{z-i}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)dz$، در صورتی که C منحنی $|z-i|=\frac{1}{2}$ می‌باشد، که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر کدام گزینه است؟ ( ln شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.)**

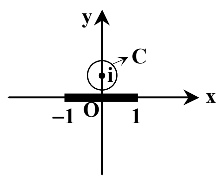
۱) $\pi^2$　　۲) $i\pi^2$　　۳) $-i\pi^2$　　۴) $-\pi^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا باید ببینیم تابع $\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$، داخل روی منحنی C تحلیلی می‌باشد یا نه، می‌دانیم تابع ln فقط روی مجموعه $\{z\,|\,\operatorname{Re}z\le 0\ ,\ \operatorname{Im}z=0\}$ تحلیلی نیست، لذا داریم:

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{x+1+iy}{x-1+iy}=\frac{(x+1+iy)[(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}+i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

پس تابع $\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ روی مجموعه‌ی زیر تحلیلی نیست:

$$\begin{cases}x^2+y^2-1\le 0\\ -2y=0\end{cases}\xrightarrow{y=0} x^2-1\le 0\Rightarrow x^2\le 1$$




همان‌طور که در ناحیه نشان داده شده مشخص است، نقاط غیر تحلیلی تابع داخل و روی منحنی C (دایره $|z-i|=\frac{1}{2}$) نیستند، اگر فرض کنیم $f(z)=z^2\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$، آن‌گاه انتگرال زیر را داریم که بر اساس قضیه‌ی کوشی به راحتی به جواب می‌رسیم:

$$I=\oint_C\frac{f(z)}{z-i}dz=2\pi i f(i)=2\pi i(i)^2\ln\left(\frac{i+1}{i-1}\right)=-2\pi i\ln\left[\frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}\right]=-2\pi i\ln\left(\frac{2i}{-2}\right)=-2\pi i\ln(-i)$$

اما مقدار $\ln(-i)$ برابر است با:　$\ln(-i)=\ln|-i|+i\operatorname{Arctg}(-i)=\ln 1-i\frac{\pi}{2}=-i\left(\frac{\pi}{2}\right)$

بنابراین حاصل انتگرال برابر مقدار زیر است:

$$\mathbf{I=-2\pi i\left(-i\frac{\pi}{2}\right)=-\pi^2}$$

**مثال ۳۱: فرض کنید مرز C مربع با رئوس $\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$ باشد که در جهت مثبت پیموده شده است، در این صورت حاصل $I=\oint_C\frac{\cosh\pi z}{z(z^2+1)}dz$ کدام است؟**

۱) $-4\pi i$　　۲) $-2\pi i$　　۳) $+4\pi i$　　۴) $+2\pi i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا نقاط تکین تابع را حساب می‌کنیم:　$z(z^2+1)=0\Rightarrow z=0\ ,\ z=\pm i$

تمام این نقاط داخل ناحیه هستند و لذا داریم:

$$z=0 \text{ در مانده }=\left.\frac{\cosh\pi z}{z^2+1}\right|_{z=0}=\frac{\cosh(0)}{1}=1$$

$$z=i \text{ در مانده }=\left.\frac{\cosh\pi z}{z(z+i)}\right|_{z=i}=\frac{\cosh\pi i}{i(i+i)}=\frac{\cosh\pi i}{-2}\ ,\quad z=-i \text{ در مانده }=\left.\frac{\cosh\pi(-i)}{z(z-i)}\right|_{z=-i}=\frac{\cosh\pi i}{-2}$$

حالا کافیست مقدار $\cosh\pi i$ حساب شود؛ که می‌دانیم برابر است با:　$\cosh(\pi i)=\cos\pi=-1$

بنابراین حاصل انتگرال برابر مقدار زیر است:

$$I=2\pi i\left[1+\left(\frac{-1}{-2}\right)+\left(\frac{-1}{-2}\right)\right]=2\pi i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\mathbf{4\pi i}$$